# МАТРИЦЫ

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Матрицы и их виды

Действия над матрицами

Обратная матрица

Ранг матрицы. Матричное способ решения системы уравнений и её совместность

# Матрицы и их виды

Определение: Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов (m, n – определяют размерность матрицы).

$$A = A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виды матриц:

1. Квадратная матрица: $m = n$.
2. Матрица строка: $A_n = (a_{11} a_{12} \dots a_{1n})$.

3. Матрица столбец: $A_m = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

4. Диагональная – называется квадратная матрица у которой отличны от нуля только элементы, расположенные на главной диагонали.

5. Единичная матрица – называется диагональная матрица, у которой на главной диагонали расположены одни единицы: $E_{nn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

6. Ноль матрица: $0_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

# Действия над матрицами

1. Равенство матриц – две матрицы одинаковой размерности равны, если равны их соответствующие элементы: $A_{m\times n} = B_{m\times n}$ , если $a_{ij} = b_{ij}$
2. Транспортирование – матрица $A^T$ является транспортированной по отношению к исходной матрице $A$, если строки первой матрицы являются столбцами другой матрицы и наоборот.

Например: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Умножение на константу – матрица $C_{mn} = KA_{mn}$, если $c_{ij} = Ka_{ij}$.
4. Сложение матриц – матрица $C_{mn} = A_{mn} + B_{mn}$, если $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
5. Умножение матриц – матрица $C_{mn} = A_{ml}B_{ln}$, если $c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$.

Замечание: Перемножать можно такие матрицы, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Замечание: Размерность матрицы определяется числом строк первой матрицы и числом столбцов второй матрицы.

Замечание: Произведение двух матриц в общем случае не перестановочно (не коммутативно), т.е. $AB \neq BA$. В частном случае произведение двух матриц может быть перестановочно, если эти матрицы квадратные и имеют одинаковую размерность.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; $AB = C_{22}\begin{pmatrix} 1\times 0 + 2(-1) + 3\times 5 & 1+8+18 \\ -2+15 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 27 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}$.

# Обратная матрица

Определение: Квадратная матрица $A^{-1}$ называется обратной по отношению к исходной матрице $A$, если выполняется следующее неравенство: $A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Определение: Квадратная матрица называется невыраженной, если определитель составленный из этой матрицы не равен нулю.

Определение: Матрица $\tilde{A}$ называется присоединённой по отношению к исходной матрице $A$, если она составлена из алгебраических дополнений транспортированной матрицы.

Пример: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Теорема: Любая невыраженная матрица имеет обратную, которая вычисляется по следующей формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\tilde{A}$.

Доказательство:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

Замечание: На главной диагонали по определению расположены значения определителя.

Замечание: На побочной диагонали элементы равны нулю по 9 свойству определителей.

# Ранг матрицы. Матричное способ решения системы уравнений и её совместность

Определение: Рангом матрицы называется наивысший порядок определителя отличного от нуля, который можно составить из исходной матрицы $RgA$.

Матричный способ решения системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \to \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\to \quad Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \to Ax = b;$$ - матричное уравнение системы

Левую и правую часть матричного уравнения умножаем на обратную матрицу:

$$AA^{-1}x = A^{-1}B; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad Ex = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad Ex = A^{-1}B \to x = A^{-1}B.$$

Определение: Система называется совместной, если она имеет одно или бесчисленное множество решений, и не совместной, если не имеет решений.

Определение: Матрица $\overline{A}$ называется расширенной, если к матрице $A$ присоединить столбец свободных членов: $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$.

Условие совместности системы Кронекера - Капелле:

Определение: Система является совместной, если ранг матрицы $A$ равен рангу расширенной матрицы $\overline{A}$: $RgA = Rg\overline{A}$.

## Случаи решения системы уравнений:

1. Система имеет единственное решение, если $RgA = Rg\overline{A} = m = n$.
2. Система имеет лишние уравнения, если $RgA = Rg\overline{A} < m$, в этом случае отбрасываются любые уравнения $(m - RgA)$ и система приводится к 1-му случаю.
3. Система имеет бесчисленное множество решений, если $RgA = Rg\overline{A} < n$, в этом случае любые $m$ неизвестные выражаются через остальные $(n - RgA)$ неизвестных.
4. Система решений не имеет, если $RgA \neq Rg\overline{A}$.