Теория вероятности

Понятие теории вероятностей (виды событий, испытания, исходы, частоты)

Определение: Теория вероятности – математическая наука, изучающая закономерности массовых однородных случайных событий, допускающих их повторение.

Виды событий:

1. Достоверное – такое событие, которое обязательно произойдет при выполнении определенной совокупности условий (вода закипает при 100 ^{0}C).
2. Невозможное – событие, которое никогда не произойдет при выполнении определенной совокупности условий (вода замерзает при 100 ^{0}C).
3. Случайное – событие, которое может произойти, а может и не произойти при выполнении определенной совокупности условий.

Определение: Выполнение определенной совокупности условий называется испытанием.

Определение: Любой из возможных результатов испытаний, называется элементарным исходом.

Определение: Событием называется один или несколько выбранных элементарных исходов.

Например: выстрел по мишени из положения лежа при сильном боковом ветре - это испытание. Попадание в мишень - это событие. Попадание и непопадание в мишень - это элементарные исходы.

Определение: Частотой появления данного события называется число m, означающее, сколько раз появилось это событие в n испытаниях.

Определение: Относительной частотой появления этого события, называется отношение частоты к числу испытаний.

$$w = \frac{m}{n}$$

Например: стрелок попал в мишень 2 раза из 10 попыток:

$$m = 2,\ n = 10 \to w = \frac{2}{10} = 0,2$$

Виды случайных событий

1. Несовместимые – такие события, появление одного из которых исключает одновременного появления другого события (появление «орла» или «решки» при одном бросании монеты).
2. Равновозможные – которые имеют одинаковую возможность появления (появление «орла» или «решки» при одном бросании монеты).
3. Достоверные – такие случайные события, которые образуют полную группу и одно из событий этой группы обязательно произойдет (попадание и непопадание в мишень - это полная группа).

Классическое определение вероятности и ее свойства

Определение: Вероятностью называется отношение числа равно возможных несовместимых элементарных исходов, благоприятствующих появлению данного события (m) к общему числу элементарных исходов (n).

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна единице.

Доказательство:

$n = 1; \quad m = 1; \quad P(A) = 1$

1. Вероятность невозможного события равна нулю.

Доказательство:

$n = 1; \quad m = 0; \quad P(A) = 0$

2. Вероятность случайного события находится в следующем интервале: $0 < P(A) < 1$.

Пример 1. Определить вероятность появления герба при бросании монет.
Решение: *m=1*, всего исходов *n=2*. *P(A)=m/n* $\Rightarrow$ ***P(A)=1/2***

Пример 2. Определить вероятность появления чётных чисел при бросании одного кубика.
Решение: *m=3*, *n=6* $\rightarrow$ ***P(A)=3/6=1/2.***

Пример 3. Определить вероятность появления чётных чисел в сумме при бросании двух кубиков.
Решение: Комбинации:

$$\left(1+1,\ 1+3, 1+5,\ 2+2,\ 2+4,\ 2+6,\ 3+3,\ 3+5,\ 4+4,\ 4+6,\ 5+6,\ 6+6\right)\times 2 \rightarrow m = 24,$$

$$n = 6\times 6 = 36 \rightarrow P\left(A\right) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

Элементы комбинаторики

1. Перестановка – комбинация из m элементов, отличающихся только порядком их следования.

$$P_m = m!$$

Пример 1. Определить число трехзначных чисел из цифр 1, 2, 3.

Решение: $m = 3 \rightarrow P_m = 3! = 1 \times 2 \times 3 \rightarrow P_m = 6$

2. Сочетание – комбинация из n элементов по m определенных элементов, отличающихся между собой составом.

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Пример 2. Определить число способов выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей.

Решение: $C_{10}^8 = \frac{10!}{8!2!} = 45$

3. Размещение – комбинация из n по m определенных элементов отличающихся и составом, и порядком следования.

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 3. Определить число сигналов из 6-ти флажков различного цвета взятых по 2.

Решение: $A_6^2 = \frac{6!}{2!} = 30$

Частные случаи сочетаний:

$$C_n^n = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1 \qquad C_n^0 = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$$

Пример 4.: В партии из 10-ти деталей 7 стандартных. Найти вероятности того, что среди 6-ти взятых наугад 4 стандартных детали.

Решение: число способ взять 6 из 19 деталей: $n = C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!} = 210$

Число способов взять 4 стандартные детали из 7: $C_7^4 = \frac{7!}{3!4!} = 35$

Число способов взять остальные 2 детали нестандартные из 3-х (10 всего минус 7 стандартных): $C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$

Всего благоприятных исходов: $m = C_7^4 C_3^2 = 35 \times 3 = 105$

Искомая вероятность $P(A) = m/n = 105/210 = \mathbf{1/2}$.

Статистическая и геометрическая вероятности

Определение: Статистической называется вероятность приближенная относительной частоте появления данного события:

$$P(A) \approx w.$$

Замечание: При числе испытаний, стремящемся к бесконечности статистическая вероятность равна относительной частоте.

Определение: Геометрической вероятностью называется отношение меры области, в которую должна попасть точка к мере области, в которую может попасть точка.

$$P(A) = \frac{\text{mes g}}{\text{mes G}}$$

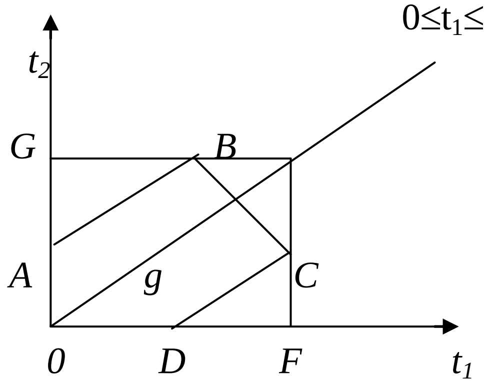
Замечание: меры областей измеряется в *м, м*^{2},*м*^{3}.

Пример. В сигнализатор поступают сигналы от 2-х устройств. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше *t* ($t<T$). Найти вероятность того ,что сигнализатор сработает за время *T* если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

Решение:

Момент поступления сигнала из 1-го устройства t_1, из устройства 2 – t_2.

$0 \le t_1 \le T$; $0 \le t_2 \le T$



Сигнализатор сработает, если $t_2 - t_1 < t$, при $t_2 > t_1$ или $t_1 - t_2 < t$, при $t_1 > t_2$.
Разрешим неравенства относительно t_2, взяв за функцию t_1:

$t_2 < t + t_1$ при $t_2 > t_1$ и $t_2 > t_1 - t$ при $t_2 < t_1$.

Построим прямые: $t_2 = t + t_1$, $t_2 = t_1 - t$.

g - область решения неравенств. *G*-область, в которую может попасть точка за наблюдаемое время *T*.

Вычислим площадь области: $OA = t;\ OF = T;\ DF = T - t;$

$Mes\ G = S_G = T^2$; $mes\ g = S_{ABCD} = S_G - 2S_{CDF} = T^2 - 2\frac{(T-t)^2}{2} = T^2 - (T-t)^2$

$$P(A) = \frac{mesg}{mesG} = \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2} = \frac{T^2 - T^2 + Tt - t^2}{T^2} = \frac{t(2T-t)}{T^2}$$

Пусть $T=60$ сек. $t=20$ сек. $P = \frac{20(120-20)}{3600} = \frac{5}{9}$

Алгебра событий:

сложение и умножение, понятие условной вероятности

Сложение событий

Определение: Суммой двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее или в появлении события *A*, или в появлении события *B*.

Теорема: Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятности каждого из этих событий.

Доказательство:

Событие *A* появится m_1 – раз, *B* – m_2 – раз. $\to P(A)=\frac{m_1}{n}, P(B)=\frac{m_2}{n}$

$$C=A+B\to m=m_1+m_2\to P(C)=\frac{m}{n}=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

Следствие: Вероятность суммы нескольких событий равна сумме вероятностей каждого из этих событий.

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

Пример 1. В ящике 5 ламп, из которых две негодных. Найти вероятность того, что хотя бы одна из двух ламп вытащенных из ящика будет годной.

Первое решение:

Событие *A* – появление 1-ой негодной из двух, событие *B* – появление 2-х негодных из двух.

$P(A)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_3^2}=0.6,\quad P(B)=\frac{C_2^2C_3^0}{C_5^2}=0.1$

$P(C)=P(A)+P(B)=0.6+0.1=0.7$ Ответ: $\boldsymbol{P(C)=0.7}$

Теорема: Сумма вероятностей событий образует полную группу, равную единице.

$A_1+A_2+\ldots+A_n$ - полная группа

Вероятность полной группы событий, как достоверного события, равна единице: $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1$

Из следствия: $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$

Определение 2: Два события, образующие полную группу, называются противоположными.

A – исходное событие, $\bar{A}$ – противоположное событие.

Следствие 2: $P(A)+P(\bar{A})=1\to P(A)=1-P(\bar{A})$

Второе решение примера 1: $P(\bar{C})=\frac{C_2^0C_3^2}{C_5^2}=0.3\to\quad P(C)=1\text{-}0.3=0.7$

Произведение событий

Определение 3: Произведением двух событий *A,B*, называется событие *C*, состоящее в одновременном появлении и события *A* и события *B*.

Определение 4: Условной вероятностью *P(A/B)* называется вероятность событий *B*, вычисленное при условии, что событие *A* уже произошло.

Пример 2. В ящике 7 годных и 3 негодных детали. Найти вероятность того , что при втором испытании появится годная деталь если при первом испытании извлечена негодная деталь.
Решение: при первом испытании извлекли негодную деталь, следовательно деталей осталось 9, из которых осталось 7 годных и 2 негодных $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{P(B/A)=7/9.}$$

Определение 5: Вероятность проявления двух событий равна проявлению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого из этих событий.

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B/A) \equiv P(B)\cdot P(A/B)$$

Следствие 3: Вероятность проявления нескольких событий.

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1A_2\ldots A_n)$$

Пример 3. В ящике 7 годных и 3 негодных детали. Найти вероятность того , что из двух взятых деталей одна будет годной, а другая будет негодной.
Решение: из примера 2 $\Rightarrow$ *P(B/A)=7/9* , вероятность появления негодной *P(A)=3/10* $\Rightarrow$

$$P(AB)=\frac{3}{10}*\frac{7}{9}=\boldsymbol{7/30}$$

Независимость событий

Определение: два события называются независимыми, если появление одного из событий не изменяет вероятность появления другого.

Условие независимости двух событий.

Теорема: Условие независимости двух событий взаимно.

Доказательство:

Дано: B не зависит от A, т.е. $P(B/A) = P(B)$

Вычислим произведение двух событий.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) \equiv P(B) \cdot P(A/B)$$

$$P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$P(A/B) = P(A)$$

Теорема: Вероятность появления двух независимых событий равна произведению каждого из этих событий.

Доказательство:

$$P(AB) = P(A) \cdot \underbrace{P(B/A)}_{=P(B)}$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Следствие: Вероятность нескольких независимых событий равна произведению вероятностей каждого из этих событий.

Пример. В 3-х ящиках находится по 10 деталей. В 1-ом 8 стандартных деталей, во 2-ом 7 стандартных деталей, в 3-ем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика вынимают по одной детали. Найти вероятность того , что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение:

$P(A_1)=8/10$, $P(A_2)=7/10$, $P(A_3)=9/10 \rightarrow P(A_1 A_2 A_3)= 0.8*0.7*0.9=\mathbf{0.504}$

Теорема о полной вероятности

Определение: Событие A называется полным, если оно может произойти только одновременно с одним из следующих событий $B_1, B_2, ..., B_n$, образующих полную группу.

Теорема: Вероятность полного события вычисляется по следующей формуле: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)$

Доказательство:

Оценим варианты свершения сложных событий

$$\underbrace{A \quad и \quad B_1}_{умножение} \quad \underbrace{или}_{сложение} \quad \underbrace{A \quad и \quad B_2}_{умножение} \quad \underbrace{или}_{сложение} \quad \ldots \quad \underbrace{A \quad и \quad B_n}_{умножение}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot \underbrace{P(A/B_i)}_{\substack{условная \\ вероятность}}$$

Пример: <u>В 1-ой коробке 20 ламп, из них 18 стандартных . Во 2-ом 10 ламп из них 9 стандартных. Из 1-ой коробки во 2-ую переложена 1 лампа. Найти вероятность того, что после этого лампа, вынутая из 1-ой коробки, будет стандартной.</u>

Решение: B_1- из 2-ой коробки переложена в 1-ую одна стандартная лампа.

B_2- из 2-ой коробки переложена в 1-ую одна нестандартная лампа.

Вероятность этих событий $P(B_1)=9/10$, $P(B_2)=1/10$.

Событие A/B_1 означает, что из первой коробки извлечена стандартная деталь, если из второй в первую переложена стандартная лампа.

Событие A/B_2 означает, что из первой коробки извлечена стандартная деталь, если из второй в первую переложена нестандартная лампа.

$P(A/B_1)=(18+1)/(20+1)=19/21$, $P(A/B_2)=(18+0)/(20+1)=18/21$

$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)=0.9*\frac{19}{21}+0.1\frac{18}{21}=\mathbf{0.9}$

Вероятность гипотез. Формула Бейеса

Определение: Гипотезами называется событие $B_1, B_2, ..., B_n$, входящее в полное событие.

Для вывода формулы Бейеса вычислим $P(AB_i)$

$$P(AB_i) = P(A) \cdot P(B_i / A) \equiv P(B_i) \cdot P(A / B_i)$$

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{P(A)}$$

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A / B_i)}$$ – Формула Бейеса.

Замечание: Формула Бейеса даёт вторичный прогноз после свершения полного события.

Пример: При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор C_1 с вероятностью $P(B_1)=0.8$ или C_2 с вероятностью $P(B_2)=1$. Вероятности того , что автомат снабжен сигнализаторами C_1 и C_2 равны $P(A/B_1)=0.6$, $P(A/B_2)=0.4$. Сигнал об отклонении от нормального режима работы поступил. Что вероятнее: сработал C_1 или C_2.

Решение:

$P(A)=P(B_1)*P(A/B_1)+P(B_2)*P(A/B_2)=0.8*0.6+1*0.4=0.88$

$P(B_1/A)=P(B_1)P(A/B_1)/P(A)=0.48/0.88=6/11$

$P(B_2/A)=P(B_2)P(A/B_2)/P(A)=5/11$

$6/11>5/11 \Rightarrow$ вероятнее всего, что сработал сигнализатор $\boldsymbol{C_1}$.

Последовательность независимых испытаний.

Формула Бернулли

Определение: Испытание называется независимым, если появление события A в одном из них не влияет на вероятность появления того же события в других испытаниях.

Определение: Последовательность независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события одинакова, называется схемой Бернулли.

$$P_i(A) = P$$

где i – номер испытания.

Вывод формулы Бернулли

Определим число возможных сложных испытаний. Из трех испытаний событие должно появиться один раз: $A\overline{A}\overline{A}$ или $\overline{A}A\overline{A}$ или $\overline{A}\overline{A}A$

$$C_3^1 = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3 \to m = C_n^k$$

m – число сложных событий появления события A в k из n возможных испытаний.

Определим вероятность появления события k - раз из n испытаний для одного из сложных событий.

$$P_1 = P(\underset{k}{A...A}\,\underset{n-k}{\overline{A}...\overline{A}}) = \underbrace{P(A)...P(A)}_{k} \cdot \underbrace{P(\overline{A})...P(\overline{A})}_{n-k} = p^k \cdot q^{n-k}$$

$$P(A) = P \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - P \to q = 1 - P$$

$$P_n(k) = m \cdot P_1 = m \cdot p^k \cdot q^{n-k} \to \boxed{P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$ - формула Бернулли

Пример: Вероятность того , что расход электроэнергии в течение суток не превысил норму *P=0.8*.Определить вероятность того, что в ближайшие 5 суток расход электроэнергии не превысит норму в любых 3-х сутках.

Решение: $P_5(3)=C_5^3*0.8^3*0.2^2=5!/3!*2!=2048/10000=\mathbf{0.2048}$

Общие случаи формулы Бернулли

Определим вероятность появления событий не более k раз из n испытаний.

$$P_n(\leq k) = P_n(k) + P_n(k-1) + \ldots + P_n \qquad (1)$$

$$P_i(\leq k) = \sum_{i=1}^{k} P_n(i) = \sum_{i=1}^{k} C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-1}$$

Определим вероятность появления событий не менее k раз в n испытаниях.

$$P_n(\geq k) = \sum_{i=k}^{n} P_n(i) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$

Определим вероятность появления событий от k_1 до $_{12}$ раз в n испытаниях.

$$P_n(k_1, k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} P_n(i) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$

Замечание: При большом числе испытаний в формуле Бернулли невозможно и практически затруднительно вычислить факториалы больших чисел, например: $C_{1000}^{50} = \dfrac{1000!}{50!950!}$.

Формулы Лапласа и Пуассона

Замечание: эти формулы вычисляют ту же вероятность, что и формула Бернулли, но применяются при очень большом числе испытаний.

1 Локальная формула Лапласа

Определим вероятность появления события в k из n испытаний

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{где} \quad x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

Известна и протабулирована чётная функция: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow$

$\boxed{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \phi(x)}$ - локальная формула Лапласа

2 Интегральная формула Лапласа

Для определения вероятности появления события от k_1 до k_2 раз в n испытаниях.

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$a = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \qquad b = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

Существует и протабулирован интеграл Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz \rightarrow$$

$\boxed{P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(b) - \Phi(a)}$ - интегральная формула Лапласа

3 Формула Пуассона

Определяем ту же вероятность что и в 1 формуле Лапласа, но при очень малых значениях вероятности:

$$\boxed{P(k) \approx \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p}}$$

Пример: Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0.001. Найти вероятность попадания в цель при 2-х и более выстрелах (до n=5000).

Решение:

$n \rightarrow \infty$, *тогда* $P_n(\geq 2) = \sum_{i=2}^{\infty} P_n(i) = 1 - P_n(0) - P_n(1)$.

$n=5000 \rightarrow P_{5000}(0)=5^0 * e^{-5}/0! = e^{-5}$; $P_{5000}(1)=5^1 e^{-5}/1! = 5e^{-5}$; $n*p=5000*0.001=5$

$P_n(\geq 2)=1-e^{-5}-5e^{-5}=1-6e^{-5}=$ ***0.9596***

Понятие случайной величины и её виды

Определение: Случайной называется величина, которая может принимать случайные значения, зависящие от случайных событий

$$X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

x_i – возможные значения случайной величины X.

Виды:

1. Дискретная случайная величина – которая может принимать отделтные изолированное друг от друга возможные значения (обычно это количество чего-то).
2. Непрерывная случайная величина – которая принимает бесчисленное множество значений из какого-то интервала (например, размер).

Пример: <u>Составить случайную величину родившихся мальчиков среди 10 новорожденных.</u>

Решение: ***X(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)***

Закон распределения случайной величины.

Определение: Законом распределения случайной величины называется соответствие между возможными значениями и вероятностями этой случайной величины.

Способы задания закона распределения:

1. Аналитический

$P=P(x)$ или $X=X(p)$

2. Табличный

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

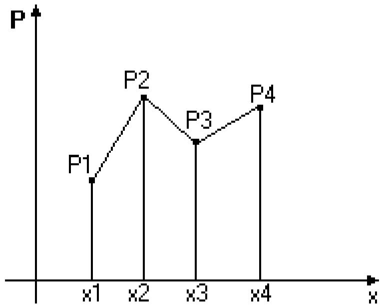
Замечание: В таблицу записываются все возможные значения случайной величины, поэтому они всегда образуют полную группу, значит:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

3. Графический

Определение: для дискретной случайной величины график зависимости $P(x)$, называется многоугольником распределения.

Определение: возможные значения случайной величины, соответствующие максимуму вероятности, называются модой.



x_2 – мода

Функция распределения и её свойства

Определение: Функцией распределения называется функция *F(x)*, которая определяет вероятность появления случайной величины *X* меньшего заданного значения *x*: $F(x) = P(X < x)$

Свойства:

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. Функция распределения является неубывающей функцией.

Требуется доказать: при $x_1 < x_2 \quad \to \quad F(x_1) \le F(x_2)$

$F(x_1) = P(X < x_1)$

$F(x_2) = P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X \le x_2)$

$F(x_2) - F(x_1) = \underbrace{P(x_1 \le X < x_2)}_{\ge 0}$

$F(x_2) - F(x_1) \ge 0 \to F(x_1) \le F(x_2)$

Следствие 1*: Вероятность попадания случайной величины в интервал, равна приращению функции распределения на этом интервале.*

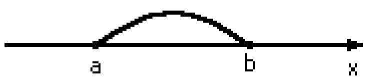
$$P(a \le x < b) = F(b) - F(a)$$

Следствие 2: Вероятность того, что случайная величина примет одно фиксированное значение равна нулю.

a=b $\qquad P(a \le x < a) = F(a) - F(a) = 0$

3. Если все возможные значения случайной величины находятся на интервале $[a;b)$ то

$$F(a) = 0, \quad F(b) = 1$$



$F(a) = P(x < a)$

$x < a$ на этом интервале нет значений, значит,

это событие невозможное $\to \quad P(x < a) = 0 \quad \to \quad F(a) = 0$

$F(b) = P(x < b)$

$x < b$ в этом интервале находятся все возможные значения, значит,

это событие достоверное $\to \quad P(x < b) = 1 \quad \to \quad F(b) = 1$

Следствие 3: Если все возможные значения случайной величины лежат на интервале $(-\infty;\infty)$, то $F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$

Замечание: Для дискретной случайной величины $F(x_k)$ определяется как сумма вероятностей тех возможных значений, которые предшествуют значению x_k.

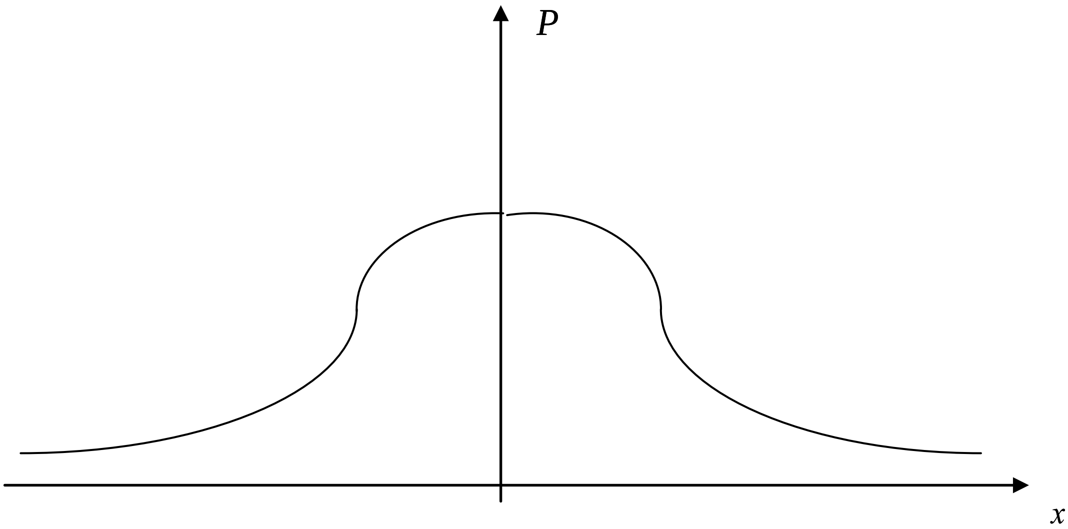
$$F(x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} P_i$$

Определение: Медианой называется число h, удовлетворяющее условию: $P(x < h) = P(x \geq h)$

Определим из этого условия уравнение, определяющее значение медианы: $P(x < h) = F(h)$, $P(x \geq h) = 1 - P(x < h) = 1 - F(h) \to F(h) = 1 - F(h) \to$

$$\boxed{F(h) = \frac{1}{2}}$$

Замечание: Мода и медиана могут совпадать:



$x = 0 - \text{мода} = \text{медиана}$

ТИПОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

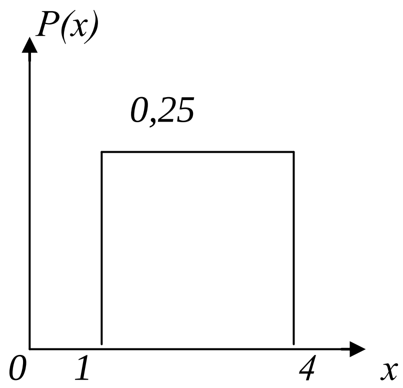
Равномерное распределение дискретной случайной величины

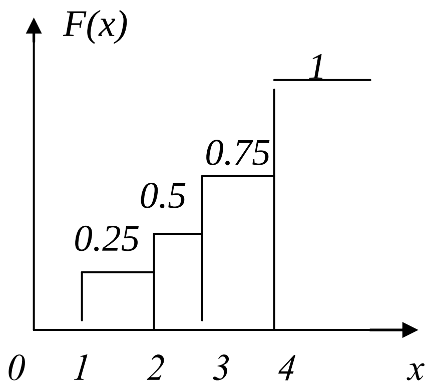
Эта случайная величина задается следующим законом распределения:

$$P = \begin{cases} 0, x \le a \\ \dfrac{1}{b-a}, a < x \le b \\ 0, x > b \end{cases}$$

Пример: $P = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{1}{4}, 0 < x \le 4 \\ 0, x > 4 \end{cases}$

Решение:





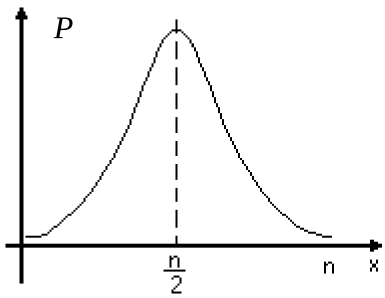
Биноминальное распределение

дискретной случайной величины

Определение: Биноминальным распределением дискретной случайной величины называется распределение, для которого вероятность вычисляется по формуле Бернулли: $P = P_n(k) = c_n^k \cdot p^k \cdot q^k, где\ q = 1 - p$

$$\boxed{P_k = c_n^k \cdot p^k \cdot q^k}$$

Замечание: при большом числе испытаний график *P(x)* приближается к графику бинома Ньютона, для которого мода расположена в середине отрезка и соответствует вероятности $\frac{1}{n}$.



Пример: <u>Монета брошена 2 раза . Составить закон распределения случайной величины X- числа выпадения герба (орла).Построить многоугольник и функцию распределения.</u>

Решение:

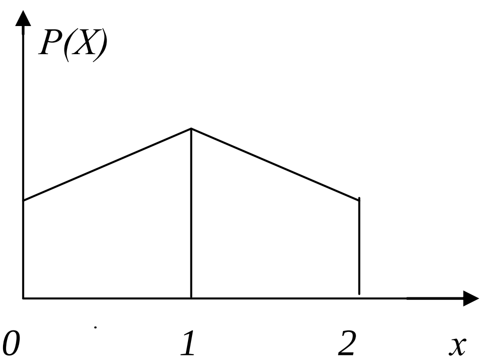
при каждом испытании вероятность одинакова *P=0,5*.

Возможные значения *X=(0,1,2)*.

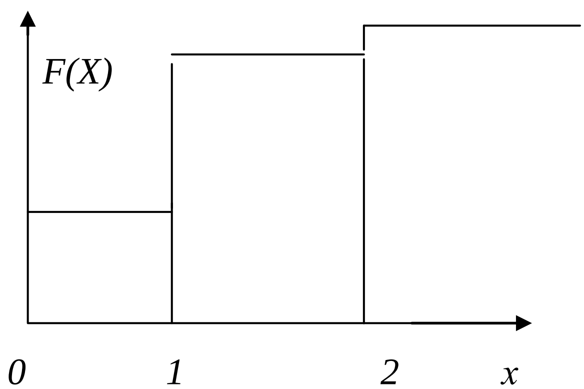
$P_2(0)=C_2^0 P^0(1-P)^2=1*1*0.5^2=0.25$

$P_2(1)=C_2^1 P^1(1-P)^2=2!*0.5*0.5/1!*1!=0.5 P_2(2)=C_2^2 P^2(1-P)^2=1*0.5^2*1=0.25$

X	*0*	*1*	*2*
P	*0.25*	*0.5*	*0.25*



многоугольник распределения



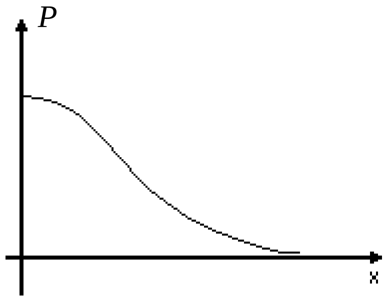
функция распределения

Пуассоновское распределение дискретной случайной величины

Пуассоновское распределение – это такое распределение, при котором вероятность вычисляется по формуле Пуассона: $P_n(k) \approx \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p}$

$$\boxed{P_k \approx \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p}}$$

<u>Замечание:</u> Так как n велико, то велико и число возможных значений и составить закон распределения для всей группы практически невозможно. Поэтому выбирается столько возможных значений, для которых сумма вероятности приближенно равна единице.



Пример: Завод выпустил 10000 изделий. Вероятность поломки в пути каждого изделия P=0.0001. Найти вероятность того, что в магазин попадет не более 5-ти негодных изделий. Составить закон распределения , построить многоугольник распределения и функцию распределения.

Решение:

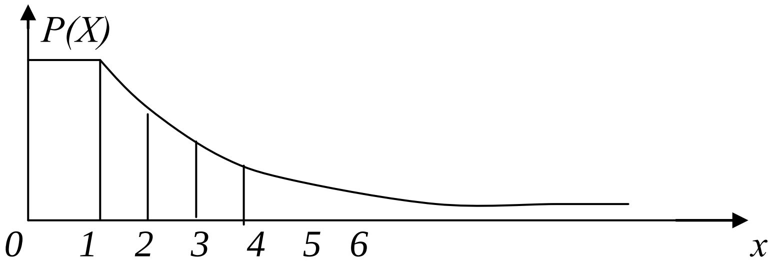
$n*p=10000*0.0001=1 \quad \Rightarrow e^{-np}=e^{-1}=1/e$

$P_{10000}(0)=e^{-1}/0!=0.37;\ \ P_n(1)=e^{-1}/1!=0.37;\ \ P_n(2)=e^{-1}/2!=0.18$

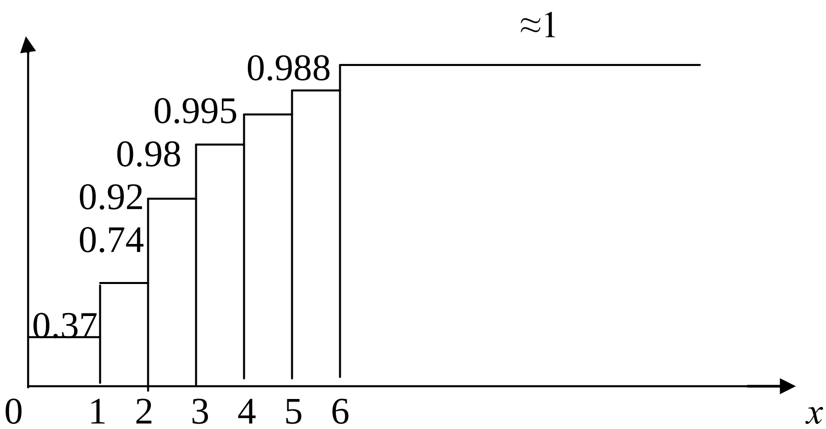
$P_n(3)=e^{-1}/3!=0.06;\ \ \ P_n(4)=e^{-1}/4!=0.015;\ \ P_n(5)=e^{-1}/5!=0.003;$

$P_n(6)=e^{-1}/6!=0.0005.$

$\sum P=0.9985\approx 1$ т.е. 6 значений по вероятности образуют почти полную группу.



многоугольник распределения



функция распределения

Ответ: наиболее вероятно с точностью $P\leq 0.98$ появления в магазине не более 4-х негодных изделий из 10000.

Математическое ожидание случайной дискретной величины и его вероятностный смысл

Определение: Математическим ожиданием называется то возможное значение, которое с наибольшей вероятностью следует ожидать после проведения испытаний.

Правило Математическое ожидание вычисляется как сумма произведений возможных значений на соответствующие им вероятности.

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_i$$

Теорема: Математическое ожидание числа появления события равно вероятности появления события в одном испытании.

Доказательство

В одном испытании закон распределения: $X(0,1)$ и $P(1-p,p)$

$$\to M(x) = 0\cdot(1-p)+1\cdot p = p, ч.т.д.$$

Вероятностный смысл

Произведено n испытаний, среди которых случайная величина X имеет возможные значения x_1, которая появляется n_1 раз, x_2 - n_2 раз, и т.д. x_m - n_m раз.

Вычислим среднеарифметическое возможных значений:

$$\overline{x} = \frac{n_1\cdot x_1 + n_2\cdot x_2 + \ldots + n_m\cdot x_m}{n} = \frac{n_1}{n}\cdot x_1 + \frac{n_2}{n}\cdot x_2 + .. + \frac{n_m}{n}\cdot x_m$$

$\frac{n_i}{n} = w$ - относительная частота $\to \overline{x} = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot x_i$

По определению, статическая вероятность при $n\to\infty$, $w_i \to p_i$:

$$\overline{x} \approx \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \to \overline{x} \approx M(x)$$

Математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому возможному значению.

Пример: найти мат. ожидание по закону распределения

X	4	6	2
P	0.4	0.2	0.4

Решение: $M(x) = 4\cdot 0,4 + 6\cdot 0,2 + 2\cdot 0,4 = 3,6$

Свойства математического ожидания дискретной случайной величины

1. Математическое ожидание константы равно самой этой константе

x	C
P	1

$M(C)=C$

$M(x)=C\cdot 1=C$

2. Постоянный множитель можно вносить за знак математического ожидания

$$M(C\cdot x)=C\cdot M(x)$$

x	x_1	x_2
P	P_1	P_2

Cx	Cx_1	Cx_2
P	P_1	P_2

$$M(x)=x_1\cdot P_1+x_2\cdot P_2 \qquad (1)$$

$$M(x)=C\cdot x_1\cdot P_1+C\cdot x_2\cdot P_2=C\cdot(x_1\cdot P_1+x_2\cdot P_2)=C\cdot M(x)$$

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин, равно произведению математического ожидания каждой из этих двух случайных величин.

$$M(x\cdot y)=M(x)\cdot M(y)$$

Y	y_1	y_2
P	g_1	g_2

$$M(Y)=y_1\cdot g_1+y_2\cdot g_2 \qquad (2)$$

Определение: произведением двух случайных величин называется такая величина, для которой возможные значения и вероятности определяются всеми возможными комбинациями значений и вероятностей случайных величин в отдельности.

XY	$x_1\cdot y_1$	$x_1\cdot y_2$	$x_2\cdot y_1$	$x_2\cdot y_2$
P	$P_1\cdot g_1$	$P_1\cdot g_2$	$P_2\cdot g_1$	$P_2\cdot g_2$

$$M(X\cdot Y)=x_1\cdot y_1\cdot p_1\cdot g_1+x_1\cdot y_2\cdot p_1\cdot g_2+x_2\cdot y_1\cdot p_2\cdot g_1+x_2\cdot y_2\cdot p_2\cdot g_2=$$

$$=x_1\cdot p_1\cdot\underbrace{(y_1\cdot g_1+y_2\cdot g_2)}_{=M(Y)}+x_2\cdot p_2\cdot\underbrace{(y_1\cdot g_1+y_2\cdot g_2)}_{=1}=$$

$$=M(Y)\cdot\underbrace{(x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2)}_{=M(X)}=M(X)\cdot M(Y)$$

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий каждой случайной величины.

Определение: Суммой двух случайных величин называется такая величина, для которой возможные значения представлены в виде всех комбинаций сумм значений, а вероятности в виде всех возможных комбинаций произведений.

X+Y	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2
P	$p_1\cdot g_1$	$p_1\cdot g_2$	$p_2\cdot g_1$	$p_2\cdot g_2$

$$M(X+Y)=x_1\cdot p_1\cdot g_1+y_1\cdot p_1\cdot g_1+x_1\cdot p_1\cdot g_2+y_2\cdot p_1\cdot g_2+$$

$$+x_2\cdot p_2\cdot g_1+y_1\cdot p_2\cdot g_1+x_2\cdot p_2\cdot g_2+y_2\cdot p_2\cdot g_2=$$

$$=x_1\cdot p_1\cdot\underbrace{(g_1+g_2)}_{=1}+x_2\cdot p_2\cdot\underbrace{(g_1+g_2)}_{=1}+y_1\cdot g_1\cdot\underbrace{(p_1+p_2)}_{=1}+y_2\cdot g_2\cdot\underbrace{(p_1+p_2)}_{=1}=$$

$$=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+y_1\cdot g_1+y_2\cdot g_2=M(X)+M(Y)$$

5. Математическое ожидание числа появления события в n независимых испытаниях в каждом из которых вероятность одинаковая, вычисляется по формуле:

$$M(x)=n\cdot P$$

По этой формуле вычисляется математическое ожидание для биномиального распределения.

Доказательство:

$$x=x_1+x_2+\ldots+x_n,\qquad M(x_i)=P$$

$$M(x)=M(x_1)+\ldots+M(x_n)=\underbrace{P+\ldots+P}_{n}=n\cdot P$$

Дисперсия дискретной случайной величины

X	-0.01	0.01
P	0.5	0.5

Y	-100	100
P	0.5	0.5

M(X)=-0.01*0.5+0.01*0.5=0, *M(Y)*= -100*0.5+100*0.5=0.
M(X) - близко к возможным значениям, *M(Y)* – далеко от своих возможных значений, поэтому, $M(x)$ не может являться единственной характеристикой случайной величины.

Определение: Отклонением называется разность случайной величины и ее математического ожидания: $x - M(x)$.

Теорема: Математическое ожидание отклонения равно нулю.

Доказательство:

$$M(x - M(x)) = M(x) - \underbrace{M(M(x))}_{const} = M(x) - M(x) = 0$$

Определение: Дисперсией называется математическое ожидание квадрата отклонений.

$$D(x) = M[x - M(x)]^2$$

Определение: Среднеквадратическим отклонением называется корень квадратный из дисперсии.

Вычисление дисперсии

Теорема: Дисперсия определяется разностью математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата математического ожидания исходной случайной величины.

Доказательство:

По определению: $D(x) = M[x - M(x)]^2$

$$\to D(x) = M\left[x^2 - 2x \cdot M(x) + M^2(x)\right] = M(x^2) - 2M(x) \cdot \underbrace{M(M(x))}_{const} + \underbrace{M(M^2(x))}_{const} =$$

$$= M(x^2) - 2M(x) \cdot M(x) + M^2(x) \to$$

$$\boxed{D(x) = M(x^2) - M^2(x)}$$

Пример:

X	1	2	5
P	0.3	0.5	0.2

Решение:

M(X)=$\sum_{i=1}^{k} X_i P_i$ =1*0.3+2*0.5+5*0.2=2.3;

M(X²)= 1^2*0.3+2^2*0.5+5^2*0.2=7.3; *D(X)*=7.3-$(2.3)^2$=2.01

Свойства дисперсии дискретной случайной величины

1. Дисперсия константы равна нулю: $D(c) = 0$

Доказательство:

$$D(c) = M(c^2) - M^2(c) = c^2 - c^2 = 0$$

2. Постоянный множитель выносится за знак дисперсии и при этом возводится в квадрат: $D(c \cdot x) = c^2 \cdot D(x)$

Доказательство:

$$D(c \cdot x) = M(c^2 \cdot x^2) - M^2(c \cdot x) = c^2 \cdot M(x^2) - c^2 \cdot M^2(x) =$$
$$= c^2(M(x^2) - M^2(x)) = c^2 \cdot D(x)$$

3. Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме дисперсии от каждой случайной величины: $D(x+y) = D(x) + D(y)$

Доказательство:

$$D(x+y) = M((x+y)^2) - M^2(x+y) = M(x^2 + 2xy + y^2) - (M(x) + M(y))^2 =$$
$$= M(x^2) + 2 \cdot M(x) \cdot M(y) + M(y^2) - M(x^2) - 2M(x) \cdot M(y) - M(y^2) =$$
$$= D(x) + D(y)$$

4. Дисперсия разности равна сумме дисперсий каждой случайной величины

$$D(x-y) = D(x) - D(y)$$

Доказательство:

$$D(x-y) = D(x + (-1) \cdot y) = D(x) + D((-1) \cdot y) =$$
$$= D(x) + (-1)^2 \cdot D(y) = D(x) + D(y)$$

5. Дисперсия для биноминального распределения вычисляется по формуле: $D(x) = n \cdot p \cdot q$, где *q=1-p*.

Доказательство:

$x = x_1 + \ldots + x_n; \quad M(x_i) = P$

X	*1*	*0*
P	*p*	*1-p*

$$M(x^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$$

$$D(x_i) = p - p^2 = p \cdot (1-p) = p \cdot q$$

$$D(x) = D(x_1 + \ldots + x_n) = D(x_1) + \ldots + D(x_n) = \underbrace{p \cdot q + \ldots + p \cdot q}_{n} = n \cdot p \cdot q$$

6. Среднее квадратическое отклонение суммы случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов среднеквадратических отклонений каждой случайной величины.

   Доказательство:

$$x = x_1 + \ldots + x_n \to \sigma(x) = \sigma(x_1 + \ldots + x_n) = \sqrt{D(x_1) + \ldots + D(x_n)} = \sqrt{\sigma^2(x_1) + \ldots + \sigma^2(x_n)}$$

7. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение от среднеарифметических независимых случайных величин, каждый из которых имеет одинаковый закон распределения, вычисляется по формулам:

$$D(\overline{x}) = \frac{D}{n} \quad \text{и} \quad \sigma(\overline{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

D и σ - соответствующие характеристики для каждой из случайных величин.

Доказательство:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \to D(\overline{x}) = D(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}) = \frac{1}{n^2} \cdot D(x_1 + \ldots + x_n) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot (D(x_1) + \ldots + D(x_n)) = \frac{1}{n^2} \cdot \underbrace{(D + \ldots + D)}_{n} = \frac{1}{n^2} \cdot D \cdot n = \frac{D}{n}$$

Начальные и центральные моменты

Определение: Начальным моментом *к*-го порядка называется математическое ожидание *к*-й степени случайной величины: $\nu_k = M(x^k)$

Определение: Центральным моментом *к*-й степени называется математическое ожидание *к*-й степени отклонения: $\mu_k = M\left[x - M(x)\right]^k$

Вычислим начальные и центральные моменты 1,2,3 порядков:

$$k = 1 \qquad \nu_1 = M(x) \qquad \mu_1 = M\left[x - M(x)\right] = 0$$

$$k = 2 \qquad \nu_2 = M(x^2) \quad \mu_2 = M\left[x - M(x)\right]^2 = D(x) = M(x^2) - M^2(x) = \nu_2 - \nu_1^2$$

$$k = 3 \qquad \nu_2 = M(x^3) \quad \mu_3 = M\left[x - M(x)\right]^3 = M\left[x^3 - 3x^2 \cdot M(x) + 3x \cdot M^2(x) - M^3\right] =$$

$$= M(x^3) - 3M(x^2) \cdot M(x) + 3M^3(x) - M^3(x) = \nu_3 - 3\nu_2 \cdot \nu_1 + 2\nu_1^3$$

Законы больших чисел

Неравенство Чебышева

Теорема: Для любого малого положительного числа ε выполняется следующее неравенство: $\forall \varepsilon > 0$ $\quad \mathrm{P}(|\mathrm{x}\text{-}\mathrm{M}(\mathrm{x})| < \varepsilon) \geq 1\text{-}\dfrac{\mathrm{D}(\mathrm{x})}{\varepsilon^2}$

Доказательство:

Вычислим исходную вероятность через вероятность противоположного события

$P(|x - M(x)| < \varepsilon) = 1 - P(|x - M(x)| \geq \varepsilon)$ (1)

Для дискретной случайной величины математическое ожидание вычислим как сумму произведения возможных значений на соответствующие вероятности, а дисперсию по формуле, которая следует из определения этой характеристики:

$$D(x) = M[x - M(x)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(x)]^2 \cdot P_i$$

Исключим из этой суммы те слагаемые, для которых выполняются неравенство: $|x_i - M(x)| < \varepsilon$ (2)

$$D(x) \geq \sum_{i=j+1}^{n} [x_i - M(x)]^2 \cdot P_i$$

j – количество слагаемых, для которых выполняется неравенство (2).

Рассмотрим следующее событие: $|x_i - M(x)| \geq \varepsilon$ (3)

Возведем в квадрат левую и правую части (3):

$[x_i - M(x)]^2 \geq \varepsilon^2 \to D(x) \geq \sum\limits_{i=j+1}^{n} \varepsilon^2 \cdot P = \varepsilon^2 \cdot \sum\limits_{i=j+1}^{n} P_i$ (4)

Сумма вероятности (4) определяет вероятность всего события (3):

$$D(x) \geq \varepsilon^2 \cdot P(|x - M(x)| \geq \varepsilon)$$

$P(|x - M(x)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{D(x)}{\varepsilon^2}$ (5)

Подставляем (5) в(1): $P(|x - M(x)| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{D(x)}{\varepsilon^2}$, ч.т.д.

Теорема Чебышева и ее значение

Теорема: Если для независимых случайных величин: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дисперсии ограничены, то $\forall \varepsilon > 0$ событие:

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M(x_i)}{n} \right| < \varepsilon \qquad (1)$$

является достоверным при $n \to \infty$.

Доказательство:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x} \to M(\overline{x}) = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} M_i \to$$

$$\textit{формула}\ (1)\ \text{будет иметь вид}: \left| \overline{x} - M(\overline{x}) \right| < \varepsilon$$

Применяем для этого события неравенство Чебышева:

$$P\left(\left| \overline{x} - M(\overline{x}) \right| < \varepsilon \right) > 1 - \frac{D(\overline{x})}{\varepsilon^2} \to D(\overline{x}) = D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} D(\overline{x})$$

По условию теоремы, дисперсия ограничена

$$n \to D(x_i) \le c \to D(\overline{x}) \le \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} c = \frac{1}{n^2} \cdot c \cdot n = \frac{c}{n}$$

$$P(\left| \overline{x} - M(\overline{x}) \right| < \varepsilon) > 1 - \frac{c}{n \cdot \varepsilon^2} \to 0$$

$$n \to \infty \qquad \lim_{n \to \infty} P(\left| \overline{x} - M(\overline{x}) \right| < \varepsilon) = 1$$

Значит событие (1) является достоверным.

Значение теоремы Чебышева

Среднее арифметическое возможных значений с точностью до малого числа ε, равно математическому ожиданию этой случайной величины (при $n \to \infty$).

Теорема Бернулли и её значение

Теорема: для биноминального распределения $\forall\varepsilon > 0$, событие

$$\left|\frac{m}{n} - P\right| < \varepsilon \qquad (1)$$ является достоверным при $n\to\infty$.

Доказательство:

Для дискретной случайной величины x_i определяет число появлений события в i-том испытании

$$\to \sum_{i=1}^{n} x_i = m - \textit{число появления данного события в n испытаниях.} \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P = P \cdot n \qquad (3) \qquad \to \frac{1}{n} M(x_i) = P$$

Подставляем (2), (3) в теорему Чебышева:

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{M(x_i)}{n}\right| < \varepsilon \qquad (4)$$

В результате получаем событие (1).

Значит, по теореме Чебышева, значение теоремы (1) является достоверным.

Известно, что $\frac{m}{n} = w$ - относительная частота $\to |w - P| < \varepsilon$.

Значение теоремы Бернулли

Относительная частота с точностью до малого числа ε равна вероятности появления данного события при $n\to\infty$.

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Определение: Плотностью распределения называется функция *f(x)*, которая связана с функцией распределения *F(x)* следующим равенством: $f(x)=F(x)$

Замечание: Функция распределения *F(x)* является первообразной от плотности распределения непрерывной *f(x)* $\rightarrow \int f(x)dx = F(x)+C$.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал

$P(a \le x < b) = F(b) - F(a)$ - (свойства *F(x)*)

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ - формула Ньютона - Лейбница $\rightarrow P(a \le x < b) = \int_a^b f(x)dx$

Вычисление функции распределения

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad (a=-\infty, b=x)$$

Пример:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 2x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x\ge 1 \end{cases}$$

Решение:

$x<0$, $F(X)=\int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$; $0\le x\le 1$, $F(x)=\int_0^x 2xdx = 2\frac{x^2}{2} = x^2$; $x>1$, $F(x)=2\int_0^1 xdx = 2$

$\frac{x^2}{2} = x^2 \quad = 1$

$$F(x)\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2 , & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

Свойства плотности распределения вероятности

1. $f(x) \ge 0$, т.к. эта функция связана с вероятностью.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Доказательство:

$P(x < \infty) = F(\infty) = 1$

$P(-\infty < x < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3. Вероятность того, что случайная величина попадает на интервал $[x, x + \Delta x)$, приближенно равна произведению плотности распределения на длину этого интервала.

Доказательство:

$P(x \le x \le x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = F'(x) \cdot \Delta x + \gamma \Delta x \approx F'(x) \cdot \Delta x = f(x) \cdot \Delta x$

$P(x \le x \le x + \Delta x) = f(x) \cdot \Delta x$

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины

Дано: X непрерывная случайная величина, принимающая бесчисленное множество значений на отрезке $[a;в]$.

Разобьем отрезок $[a;в]$на n частей и выберем внутри каждой части произвольную точку. Вместо бесчисленного значения возможных значений, получим n значений выбранных точек, которые можно рассмотреть, как возможное значение дискретной случайной величины.

Для дискретной случайной величины, математическое ожидание вычисляется по формуле: $M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_i$,

Если Δx_i - длина каждого участка, то P_i можно вычислить по третьему свойству плотности распределения:

$$P_i = P(x_i \le x < x_i + \Delta x_i) \approx \varphi(x_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\to M(x) \approx \sum_{i+1}^{n} x_i \cdot f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

$\to M(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i+1}^{n} x_i \cdot f(x_i) \cdot \Delta x_i$ - определенный интеграл.

$$\boxed{M(x) = \int_a^b x \cdot f(x)dx}$$

$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$, если $x \in (-\infty; \infty)$.

По определению дисперсия вычисляется: $D(x) = M[x - M(x)]^2$

$$\to D(x) = \int_a^b [x - M(x)]^2 \cdot f(x)dx$$

Или по другой формуле: $D(x) = M(x^2) - M^2(x)$

$$\boxed{D(x) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - M^2(x)}$$

Характеристики равномерно распределенной непрерывной случайной величины

Определение: Распределение называется равномерным, если для него плотность распределения вычисляется по формуле:

$$f(x)=\begin{cases}0, x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, a\le x<b\\ 0, x>0\end{cases}$$

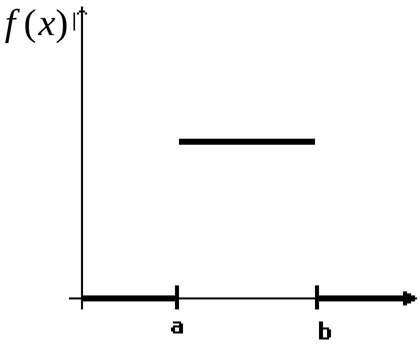
Функция распределения:

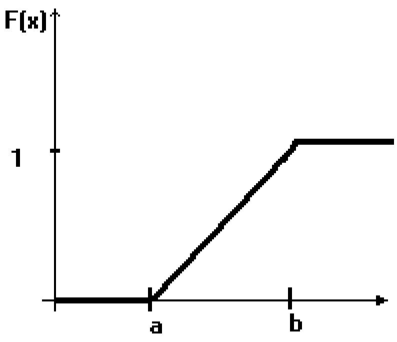
$x<a$ $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} odx=0,$$

$x<b$ $$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dx+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\left.\frac{1}{b-a}\right|_a^x=\frac{x-a}{b-a},$$

$x>b$ $$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dx+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{x}0dx=\left.\frac{b}{b-0}\right|_a^b=1$$

$$F(x)=\begin{cases}0, x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, a\le x<b\\ 1, x>b\end{cases}$$





Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$$

$$\boxed{M(x)=\frac{b+a}{2}}$$

Дисперсия:

$$D(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)dx-M^2(x)=\int\limits_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx-\frac{(b+a)^2}{4}=\frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b-$$

$$-\frac{b^2+2ab+a^2}{4}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{x^2+2ab+a^2}{4}$$

$$D(x)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{b^2+2ab+a^2}{4}=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12}=$$

$$=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}\rightarrow \qquad \boxed{D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}}$$

Среднеквадратическое отклонение:

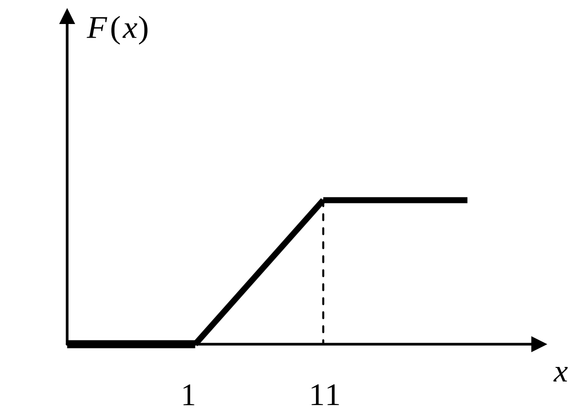
$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}\rightarrow\sigma(x)=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}\rightarrow\sigma(x)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Вероятность попадания в заданный интервал:

$$P(c\le x<d)=F(d)-F(c)=\frac{d-a}{b-a}-\frac{c-a}{b-a}=\frac{d-c}{b-a}$$

$$\left(F(x)=\frac{x-a}{b-a}\right)$$

Пример: <u>Найти $M(10X+1)$ по заданному графику функции распределения</u>



$M(10X+1)=10M(X)+1$. Из рисунка видно, что это равномерное распределение, поэтому: $\boxed{M(x)=\frac{b+a}{2}}$

$$\rightarrow M(x)=\frac{11+1}{2}=6\rightarrow M(10X+1)=10\cdot 6+1=61$$

Характеристики показательного распределения непрерывной случайной величины

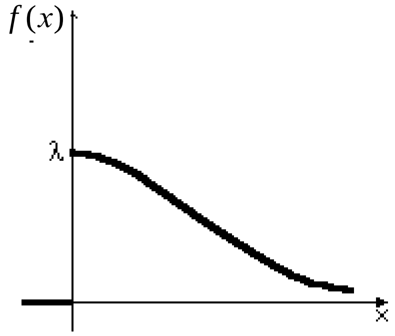
Определение: Показательным распределением называется такое распределение, для которого плотность распределения вычисляется по формуле: $f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$, где λ - *const*.

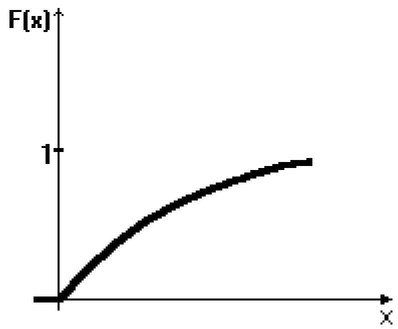
Функция распределения

$$x<0,\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dx=0$$

$$x\ge 0,\quad F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{x}\lambda^{-\lambda\cdot x}dx=\left.\frac{\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}}{-\lambda}\right|_{0}^{x}=-e^{-\lambda\cdot x}+1$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda\cdot x}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$$





$$x\to\infty;\quad f(x)=\frac{\lambda}{e^{\infty}}\to 0.$$

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{0}^{\infty} x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}dx=\lambda\cdot\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\Rightarrow$$

$$\int x\cdot e^{-\lambda\cdot x}dx=-\frac{x\cdot e^{-\lambda\cdot x}}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int e^{-\lambda\cdot x}dx=\frac{1}{\lambda}\cdot\left(-x\cdot e^{-\lambda\cdot x}-\frac{e^{-\lambda\cdot x}}{\lambda}\right)$$

по частям: $U=x \ \to dU=dx$; $dV=e^{-\lambda\cdot x}\to V=\frac{e^{-\lambda\cdot x}}{-\lambda}$

$$\int x\cdot e^{i\lambda\cdot x}=-\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda\cdot x}\left(x+\frac{1}{\lambda}\right)\Rightarrow$$

$$M(x)=-\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\lim_{b\to\infty}e^{-\lambda\cdot x}\cdot\left(x+\frac{1}{\lambda}\right)\Bigg|_0^b=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{b+\frac{1}{\lambda}}{e^{b\cdot\lambda}}-\frac{1}{\lambda}\right]=$$

$$=-\lim_{b\to\infty}\underbrace{\frac{b+\frac{1}{\lambda}}{e^{b\cdot\lambda}}}_{=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}+\frac{1}{\lambda}=-\lim_{b\to\infty}\underbrace{\frac{1}{\lambda\cdot e^{b\cdot\lambda}}}_{=0}+\frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{M(x)=\frac{1}{\lambda}}$$

Дисперсия:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)dx-M^2(x)=\int_{0}^{\infty}x^2\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\lambda\cdot\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}x^2\cdot e^{-\lambda\cdot x}dx-\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\int x^2\cdot dx=-\frac{x^2\cdot e^{-\lambda\cdot x}}{\lambda}+\frac{2}{\lambda}\int x\cdot e^{-\lambda\cdot x}dx=\frac{x^2\cdot e^{-\lambda\cdot x}}{\lambda}-\frac{2}{\lambda^2}\cdot e^{-\lambda\cdot x}\cdot\left(x+\frac{1}{\lambda}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda\cdot x}\cdot\left(x^2+\frac{2\cdot x}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}\right)$$

По частям: $U=x^2\to dU=2xdx$; $dV=e^{-\lambda\cdot x}\to V=\frac{e^{-\lambda\cdot x}}{-\lambda}$

$$D(x)=\lim_{b\to\infty} e^{-\lambda\cdot x}\cdot\left(x^2+\frac{2\cdot x}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}\right)\Bigg|_0^b-\frac{1}{\lambda^2}=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^2+\frac{2\cdot b}{\lambda}+\frac{2}{x^2}}{e^{\lambda\cdot b}}-\frac{2}{\lambda^2}\right)-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{Db+\frac{2}{\lambda}}{\underbrace{\lambda\cdot e^{\lambda\cdot b}}_{=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}}+\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=-\lim_{b\to\infty}\frac{2}{\underbrace{\lambda^2\cdot e^{\lambda\cdot b}}_{=0}}+\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\boxed{D(x)=\frac{1}{\lambda^2}}$$

Среднеквадратическое отклонение: $\boxed{\sigma(x)=\frac{1}{\lambda}}$

Вероятность попадания в заданный интервал:

$$P(c\le x<d)=F(d)-F(c)=1-e^{-\lambda\cdot d}-1+e^{-\lambda\cdot c}=e^{-\lambda\cdot c}-e^{-\lambda\cdot d}$$

Функция надежности показательного распределения непрерывной случайной величины

Пусть случайная величина X обозначает время безотказной работы прибора, x – нормативное время до отказа прибора.

$F(x)=P(X<x)\to$ вероятность отказа прибора (до нормативный отказ)

$P(X\ge x)\to$ вероятность безотказной работы (сверх нормативный работа)

$P(X>x)=1-P(X<x)=1-F(x)=R(x)$

Функцией надежности называется вероятность безотказной сверх нормативной работы (*R(x)*):

$$R(x)=\begin{cases}e^{-\lambda\cdot x}, x\ge 0\\ 1, x<0\end{cases}$$

Характеристики нормального распределения непрерывной случайной величины

Определение: Нормальным называется распределение для которого плотность распределения вычисляется по следующей формуле:

$$f(x)=\frac{1}{b\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2b^2}},\quad x\in(-\infty;\infty),\ \text{где } a \text{ и } b-const.$$

Замечание: Функция распределения $F(x)$ в элементарных функциях не существует, т.к. нет первообразной от функции плотности $f(x)$.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=\frac{1}{b\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}dx$$

Замена: $t=\dfrac{x-a}{b}\to dt=\dfrac{dx}{b}\to dx=b\cdot dt\to x=b\cdot t+a$

$$M(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(t\cdot b+a)\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\underbrace{\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}}_{\substack{неч.\\ ф-я}}dt}_{интеграл=0}+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}}_{=\sqrt{2\pi}}$$

Замечание: интеграл на интервале симметричном относительно 0 от нечетной функции равен нулю.

Второй интеграл является интегралом Лапласа и равен $\sqrt{2\pi}$.

$$\to M(x)=a\to f(x)=\frac{b-1}{b\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-M)^2}{2b^2}},\quad x\in(-\infty;\infty)$$

Дисперсия:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-M(x)\right]^2\cdot f(x)dx=\frac{1}{b\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-M(x)\right]^2\cdot e^{-\frac{(x-M)^2}{2b^2}}dx$$

Замена: $t=\dfrac{x-M}{b}\to dt=\dfrac{dx}{b}\to dx=b\cdot dt\to x-M=b\cdot t$

$$D(x)=\frac{b^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t(t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}})dt$$

По частям:

$$U=t\to \quad dU=dt$$

$$dV=t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt\to \quad V=\int t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Замена: $z=-\frac{t^2}{2}\to dz=-tdt\to dt=\frac{dz}{-z}\to V=-\int e^z dz=-e^z=-e^{-\frac{t^2}{2}}$

$$D(x)=\frac{b^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{=\sqrt{2\pi}}\right)=\frac{b^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-\lim_{b\to\infty}t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^b-\lim_{a\to\infty}t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_a^0+\sqrt{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{b^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-\lim_{b\to\infty}\left(\underbrace{\frac{b}{e^{\frac{b^2}{2}}}}_{=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}-0\right)-\lim_{a\to\infty}\left(0-\frac{a}{e^{\frac{a^2}{2}}}\right)+\sqrt{2\pi}\right)=$$

правило Лопиталя

$$=\frac{b^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\underbrace{-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b\cdot e^{\frac{b^2}{2}}}}_{=0}+\underbrace{\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a\cdot e^{\frac{a^2}{2}}}}_{=0}+\sqrt{2\pi}\right)$$

$$D(x)=b^2$$

Средне квадратическое отклонение: $\sigma=b$.

Окончательно имеем: $f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}$, $x\in(-\infty;\infty)$

Построение графика функции плотности распределения.

1. $x\in(-\infty;\infty)$**;**

2. $f(-x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}$ - общего вида;

3. x=0; $f(0)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{M^2}{2b^2}}$

$A\left(0,\frac{1}{b\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{M^2}{2\sigma^2}}\right)$ - точка пересечения с осью ординат.

$f(x)\neq 0$ - с осью абсцисс точек пересечения нет.

4. Точек разрыва нет.

5. Вертикальных асимптот нет

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{1}{x\cdot e^{\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-k\cdot x\right]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{1}{x\cdot e^{\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}}=0$$

$\to y=0$ - горизонтальная асимптота.

6. $$y'=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(x-M)\right)=\frac{1}{\sigma^3}\cdot(x-M)\cdot e^{-\frac{(x-M)^2}{e^2\cdot\sigma^2}}$$

$y'=0\to x=M-$ *критическая точка на экстремум.*

$$y''=-\frac{1}{\sigma^3\cdot\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}+(x-M)\cdot e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}-\left(-\frac{(x-M)}{\sigma^2}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{\sigma^3\cdot\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}}=1-\frac{(x-M)}{2\sigma^2}$$

$$y''(M)=\frac{1}{\sigma^3\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{M^2}{2\sigma^2}}\left[1-\frac{M^2}{\sigma^2}\right]<0$$

в точке $x=M$ - функция имеет максимум.

7. $f(M)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\to\quad B\left(M;\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\right)$ - точка максимума.

8. $y''=0\to\quad 1-\frac{(x-M)^2}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}=0$

$$(x-M)^2=\sigma^2;\ \begin{matrix}x-M=\sigma\to x=M+\sigma\\ x-M=-\sigma\to x=M+\sigma\end{matrix}$$

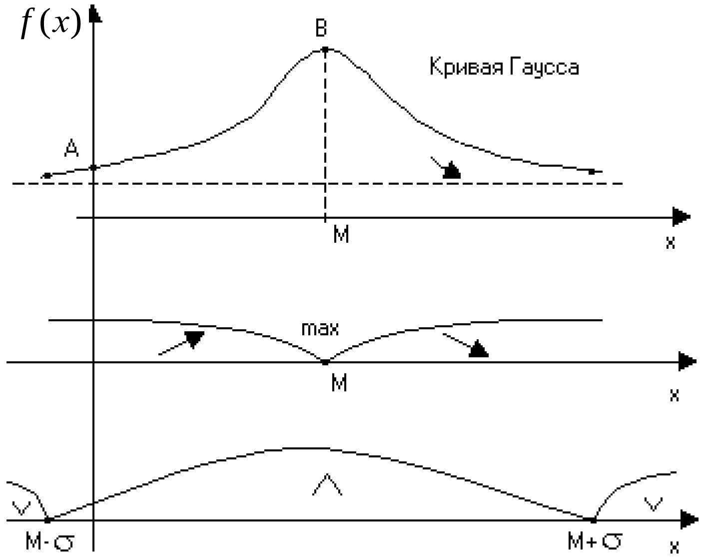
$$y''(M-2\sigma)=-\frac{1}{\sigma^3\cdot\sqrt{2\pi}}\left[1-\frac{M-2\sigma-M^2}{\sigma^2}\right]>0\to \text{\it вогнутость}$$

$$y''(M+2\sigma)>0-\text{\it вогнутость}$$

$$y(M)=-\frac{1}{\sigma^3\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot[1]<0-\text{\it выпуклость}$$

$$C,D\left(M+\sigma;\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\right)-\text{\it точки перегиба}$$

9. График



Вероятность попадания в заданный интервал. Правило 3σ для нормального распределения

$$P(a \le x < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-M)}{2\sigma^2}} dx$$

Существует функция Пуассона, которая вычисляется по формуле:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_o^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Замена:

$$z = \frac{x-M}{\sigma} \to dz = \frac{dx}{\sigma}$$

$$dx = \sigma \cdot dz \to z_н = \frac{a-M}{\sigma}; z_в = \frac{b-M}{\sigma}$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_н}^{z_в} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\frac{b-M}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int_0^{\frac{a-M}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)$$

$$P(a \le x < b) = \Phi\left(\frac{b-M}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-M}{\sigma}\right)$$

Вычислим вероятность того, что отклонение случайной величины лежит в пределах данного допуска δ (дельта).

$|x - M| < \delta$ - отклонение

$$-\delta < x - M < \delta$$

$$\underbrace{M - \delta}_{a} < x < \underbrace{M + \delta}_{b}$$

$$P(|x - M| < \delta) = \Phi\left(\frac{M + \delta - M}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{M - \delta - M}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\delta}{-\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

$$\delta = 3\sigma$$

$$P\left(|x - M| < 3\sigma\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) \approx 1$$

Правило 3σ:

Для нормального распределения все возможные значения равные ≈1, лежат в следующем интервале: $M - 3\sigma < x < M + 3\sigma$

Центральная предельная теорема Ляпунова

Терема: Если случайная величина представлена в виде суммы очень большого числа независимых случайных событий, влияние каждой из которой на сумму ничтожно мало, то такая случайная величина имеет распределение близкое к нормальному.

Замечание: Суммарная ошибка измерений и является такой случайной величиной.