Теория функции комплексного переменного.

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:

Fedorovkniga.jimdo.com

Конформные отображения.

Однолистные аналитические функции.

Конформные отображения, осуществляемые с элементарными функциями.

1. Конформные отображения.

$$\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Функция $w = f(z)$, определенная в некоторой области G, $(G \subset C)$ отображает эту область на некоторое множество точек E комплексной плоскости w. Множество E называется *образом*, а область G – *прообразом* при отображении, осуществляемом функцией $w = f(z)$. Аналитические функции обладают свойством *сохранения области*: если функция $f(z)$ аналитична в G и $f(z) \neq \text{const}$, то множество E представляет область. Неаналитические функции таким свойством, вообще говоря, не обладают. Например, функции

$$w_1 = z + \bar{z}, \quad w_2 = z\,\bar{z}$$

отображают любую область в отрезки вещественной оси.

Аналогичным свойством обладают аналитические функции в отношении линий: всякая кривая, лежащая в области G, отображается аналитической функцией $w = f(z)$ в кривую, расположенную в области E.

2. Однолистные аналитические функции.

Функция $f(z)$, заданная в области G, называется однолистной в этой области, если в различных точках области она принимает различные

значения, т.е. если из условия $z_1 \neq z_2$ $(z_1, z_2 \in G)$ следует $f(z_1) \neq f(z_2)$. Однолистность функции означает однозначность обратной функции. Отображение, осуществляемое однолистной функцией, является взаимно – однозначным.

Докажем, что если функция является аналитической, то для неё выполняется условие: $f'(z) \neq 0$

Вычислим главную часть полных приращений функций двух переменных $u(x,y), v(x,y)$ в точке (u_0, v_0):

$$u-u_0=\frac{\partial u}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(y-y_0)\quad(2.1)\qquad\qquad v-v_0=\frac{\partial v}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(y-y_0)\quad(2.2)$$

Выражения (2.1) и (2.2) можно рассматривать как главную часть отображения $\omega=f(z)$. Составим из (2.1) и (2.2) систему относительно x,y и решим её методом Крамара:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}y=\dfrac{\partial u}{\partial x}x_0+\dfrac{\partial u}{\partial y}y_0+u-u_0\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial x}x+\dfrac{\partial v}{\partial y}y=\dfrac{\partial v}{\partial x}x_0+\dfrac{\partial v}{\partial y}y_0+v-v_0\end{cases}\qquad D=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

Если главный определитель не равен нулю, то предполагаемое отображение является взаимно-однозначным в этой области.

$$D_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x}x_0 + \frac{\partial u}{\partial y}y_0 + u - u_0\right)\frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}x_0 + \frac{\partial v}{\partial y}y_0 + v - v_0\right)\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$D_y = \left(\frac{\partial v}{\partial x}x_0 + \frac{\partial v}{\partial y}y_0 + v - v_0\right)\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}x_0 + \frac{\partial u}{\partial y}y_0 + u - u_0\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$x = \frac{1}{D}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}x_0 + \frac{\partial u}{\partial y}y_0 + u - u_0\right)\frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}x_0 + \frac{\partial v}{\partial y}y_0 + v - v_0\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \qquad (2.3)$$

$$y = \frac{1}{D}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}x_0 + \frac{\partial v}{\partial y}y_0 + v - v_0\right)\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}x_0 + \frac{\partial u}{\partial y}y_0 + u - u_0\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right] \qquad (2.4)$$

Тогда любая прямая: $y = kx + b$ отобразится, если подставить (2.3) и (2.4) в уравнение прямой, в прямую:

$$\frac{1}{D}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}x_0 + \frac{\partial v}{\partial y}y_0 + v - v_0\right)\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}x_0 + \frac{\partial u}{\partial y}y_0 + u - u_0\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right] =$$

$$= k\frac{1}{D}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}x_0 + \frac{\partial u}{\partial y}y_0 + u - u_0\right)\frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}x_0 + \frac{\partial v}{\partial y}y_0 + v - v_0\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right] + b$$

Используем условиями Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

Подставляем эти условия в главный определитель: $D = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$

Производная имеет вид: $f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}$.

Её модуль: $|f'(z)| = \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{D}$

Модуль производной означает коэффициент растяжения главной части отображения.

Аргумент производной $\alpha = arctg\left(\dfrac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial x}}\right)$ означает угол поворота главной части отображения.

3. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями.

Класс элементарных аналитических функций включает степенную функцию, многочлены, рациональные функции, показательную и логарифмическую функции, тригонометрические и гиперболические функции, обратные тригонометрические и гиперболические функции, а также все функции, которые можно получить из перечисленных с помощью конечного числа четырех арифметических действий и композиций.

3.1. Линейная функция.

Линейной функцией называется функция $w = az + b$, где a, b – любые комплексные константы, $a \neq 0$.

Записав коэффициент a в виде $a = ke^{i\alpha}$ (где k, α вещественны, $k > 0$), можно представить отображение, производимое линейной функцией, как последовательность трех преобразований: растяжения в k раз; поворота на угол α и параллельного переноса вдоль вектора b.

Линейная функция производит конформное отображение любой области на геометрически подобную область. Линейная функция – единственное отображение, сохраняющее подобие всех фигур.

Пример: $\varpi = az + b$

$\varpi = ax + iay + b \to u = ax + b \; v = ay$

Прямая $y = x$ отображается: $v = ax \to u = v + b$ в прямую.

3.2. Квадратическая функция.

Квадратичной функцией называется многочлен второй степени

$$w = az^2 + 2bz + c, \tag{3.1}$$

где a, b, c – любые комплексные константы, $a \neq 0$. Записывая функцию (3.1) в виде

$$w = a\left(z + \frac{b}{a}\right)^2 + c - b^2/a$$

и вводя обозначения $z_0 = -b/a$, $w_0 = c - b^2/a$, можно представить ее как композицию трех преобразований:

$$\zeta = z - z_0, \quad t = \zeta^2, \quad w = at + w_0, \tag{3.2}$$

из которых первое и последнее – линейные. Таким образом, для исследования отображений, осуществляемых квадратичной функцией, достаточно исследовать отображение простейшей функцией $w = z^2$.

Простейшая квадратичная функция

Функция $w = z^2$ имеет единственную критическую точку $z = 0$. Осуществляемое ею отображение изогонально всюду, кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$.

Функция $w = z^2$ на комплексной плоскости неоднолистна – она принимает одинаковые значения в точках z и $-z$. В качестве области однолистности рассматривается обычно какая-либо полуплоскость $C < \arg z < C + \pi$, где C – любое вещественное число. Вводя в полуплоскости полярные координаты $z = \rho e^{i\varphi}$, имеем

$$|w| = \rho^2;\ \arg w = 2\varphi.$$

Таким образом, полярная сеть линий в полуплоскости $C < \arg z < C+\pi$ отображается в полярную сеть линий в плоскости w с разрезом вдоль луча прямой:

$$2C < \arg z < 2C + 2\pi.$$

В частности, верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ $(C = 0)$ отображается функцией $w = z^2$ в плоскость w с разрезом вдоль положительной вещественной полуоси, а правая полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ $(C = -\pi/2)$ – в плоскость с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси.

Рассмотрим отображение декартовой сети функцией $w = z^2$. В декартовых координатах имеем: $w = u + iv = (x + iy)^2$, или

$$u = x^2 - y^2,\ v = 2xy.$$

Прямые $x = C$ отображаются в кривые, определяемые параметрически

$$u = C^2 - y^2,\ v = 2Cy.$$

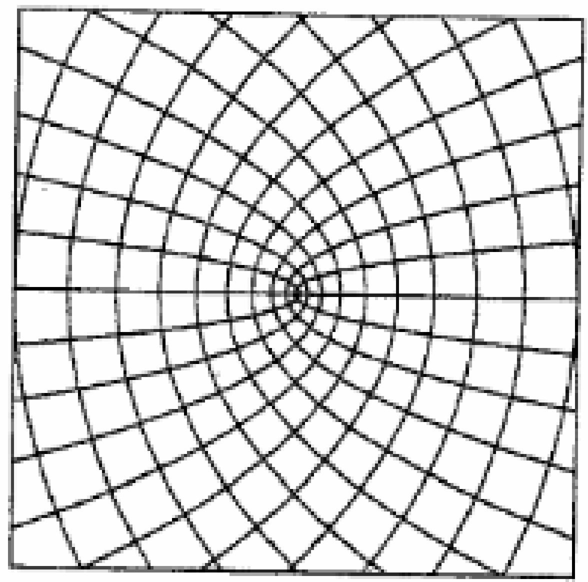
Исключая отсюда параметр y, получим (при $C \neq 0$) уравнение софокусных парабол

$$u = C^2 - \left(\frac{v}{2C}\right)^2. \tag{3.3}$$

Прямые $y = C_1$ отображаются аналогично (при $C_1 \neq 0$) в семейство софокусных парабол

$$u = \left(\frac{v}{2C_1}\right)^2 - C_1^2, \tag{3.4}$$

ортогональных семейству (3.3). Таким образом, декартова сеть линий в верхней полуплоскости конформно отображается функцией $w = z^2$ в два взаимно-ортогональных семейства софокусных парабол, изображенных на фиг. 3.1. Всякая прямая плоскости z, не проходящая через



Фиг. 3.1. Отображение декартовой сети функцией $w = z^2$

начало координат, отображается в параболу.

Рассмотрим, во что отображается круги функцией $\omega = z^2$. Если критическая точка $z = 0$ лежит внутри круга, то отображение этого круга не является конформным. Функция $\omega = z^2$ является однолистной в круге $|z - z_0| < R$ только в том случае, когда $R < z_0$. Поместим центр круга на вещественной оси (мнимая часть равна нулю) и построим отображение окружности $|z - a| = a$, проходящее через точку $z = 0$.

В показательной форме: $z - a = re^{i\varphi}$; $r = a \to z - a = ae^{i\varphi} \to z = a + ae^{i\varphi}$

По формуле Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, если центр находится на вещественной оси, то мнимая часть равна нулю: $e^{i\varphi} = \cos\varphi \to z = a + a\cos\varphi$

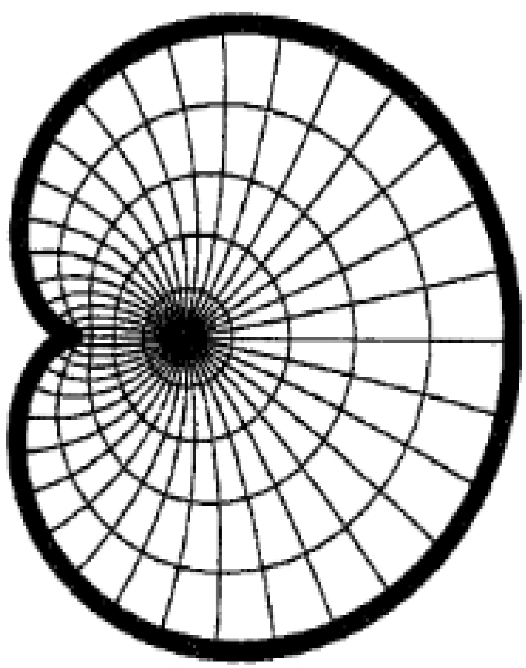
$$\to z = a(1+\cos\varphi) \to z = 2a\cos^2\frac{\varphi}{2} \to z = 2a\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$e^{i\frac{\varphi}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2} \to z = 2a\cos\frac{\varphi}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \to \omega = z^2 = 4a^2e^{i\varphi}\cos^2\frac{\varphi}{2} \to \omega = 2a^2e^{i\varphi}(1+\cos\varphi) = L(1+\cos\varphi)$$ -

это уравнение похоже на уравнение кардиоиды $\to r = 2a^2(1+\cos\varphi) = L(1+\cos\varphi)$ в полярной системе координат.

Если ФКП представить в показательной форме: $\omega = \rho e^{i\psi} = 4a^2 e^{i\varphi} \cos^2 \frac{\varphi}{2}$., то радиусы круга отображаются дугами парабол: $\rho = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, а окружности - в замкнутые гладкие кривые, похожие на кардиоиды, называемые улитками Паскаля.

Отображение круга $|z - 1| < 1$ функцией $w = z^2$ представлено на фиг. 3.2.



Фиг. 3.2. Отображение круга $|z - 1| < 1$ функцией $w = z^2$

3.4. Функция Жуковского.

Функцией Жуковского называется рациональная функция

$$w = \frac{z^2+1}{2z} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \qquad (3.5)$$

Она имеет полюсы первого порядка в точках $z = 0$ и $z = \infty$. Производная функции (3.15)

$$w'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

обращается в нуль в точках $z = \pm 1$. Точки $z = \pm 1$ являются критическими; во всех остальных точках полной плоскости $\overline{C}$ отображение (3.5) является изогональным.

Используем тригонометрическую форму записи комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$w=\frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{1}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\right)$$

$$\to w=\frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}\right)$$

$$\to w=\frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{r(\cos^2\varphi-i^2\sin^2\varphi)}\right)\to w=\frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\right)$$

$$\to w=\frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{r}\right)$$

$$\to u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi\to v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi.\ (3.6)$$

Если ищется отображение окружности $|z| = r_0 < 1$, то уравнения (3.6) соответствуют параметрическому способу задания эллипса с полуосями

$\frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)$ и $-\frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)$

Если ищется отображение окружности $|z| = r_0 > 1$, то уравнения (3.6) соответствуют параметрическому способу задания эллипса с полуосями

$\frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)$ и $\frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)$

Если ищется отображение окружности $|z| = r_0 = 1$, то уравнения (3.6) соответствуют параметрическому способу задания эллипса с полуосями

$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1$ и $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0$, что на самом деле является отрезком на действительной оси $[-1,1]$

3.5. Показательная (экспоненциальная) функция.

Экспонента комплексного аргумента $z = x + iy$ определяется как

$$w = e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i\, e^x \sin y\,. \qquad (3.7)$$

Функция e^z является целой трансцендентной функцией (т.е. она аналитична на всей комплексной плоскости и имеет существенную особенность только в бесконечно удаленной точке). Для нее имеем

$$|w| = e^x\,, \quad \arg w = y\,, \qquad (3.8)$$

следовательно, карта рельефа функции e^z представляет декартову сеть

Производная функции (3.7) $w' = e^z$ нигде не обращается в нуль, ледовательно, отображение $w = e^z$ является локально-конформным в любой точке комплексной плоскости C.

Из определения функции (3.7) следует, что она является периодической с чисто мнимым периодом $2\pi i$, т.е. $e^z = e^{z+2\pi i n}$ при любом $n \in Z$.

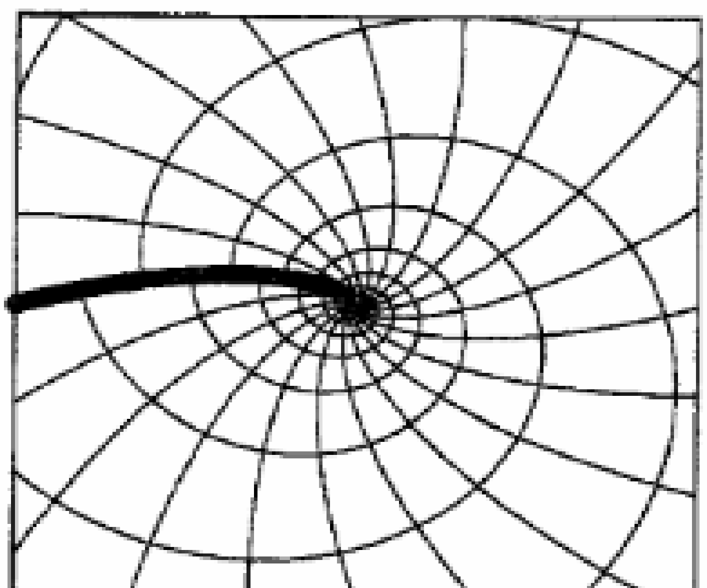
Рассмотрим, в какую линию отображает функция (3.7) наклонную прямую $y = ax + b$. Записывая функцию w в показательной форме

$$w = R\,e^{i\Phi},$$

имеем, согласно (3.8) $R = e^x$, $\Phi = ax + b$. Исключая отсюда параметр x, получим

$$R = \exp\left(\frac{\Phi - b}{a}\right).$$

Таким образом, всякая наклонная прямая плоскости z отображается функцией (3.7) в логарифмическую спираль. [2] Если прямая образует



Фиг. 3.3 Логарифмические спирали

3.6. Гиперболические т тригонометрические функции.

Гиперболические функции комплексного аргумента определяются так:

$$\mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \qquad \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1},$$

$$\mathrm{h}\, z = \frac{1}{\mathrm{ch}\, z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}.$$

Функции $\mathrm{ch}\, z$ и $\mathrm{sh}\, z$ можно рассматривать как композицию экспоненты и функции Жуковского:

$$\xi = e^z, \qquad \mathrm{ch}\, z = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right),$$

$$\xi_1 = i\, e^z, \qquad \mathrm{sh}\, z = \frac{1}{2i}\left(\xi_1 + \frac{1}{\xi_1}\right).$$

Тригонометрические функции комплексного переменного $\cos z$ и $\sin z$ определяются как аналитические продолжения функций $\cos x$ и $\sin x$ с вещественной оси. Для вещественных значений аргумента из формулы Эйлера следует

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Рассматривая аналитические продолжения этих функций, имеем для любых $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{3.28}$$

Очевидна связь тригонометрических функций с гиперболическими:

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z. \tag{3.29}$$

Функции $\sin z$ и $\cos z$ связаны между собой соотношением $\sin z = \cos(z - \pi/2)$, т.е. линейным преобразованием (трансляцией) независимого переменного z. Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ тоже выражаются через $\sin z$ и $\cos z$ с помощью линейного преобразования независимого переменного (3.10) представляющего поворот на угол $\pi/2$. Следовательно, для изучения конформных отображений, осуществляемых функциями $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, достаточно исследовать одно из них, скажем, $\cos z$. Остальные преобразования будут получаться из исследованного преобразованиями трансляции и (или) поворота плоскостей z и w на угол $\pi/2$.

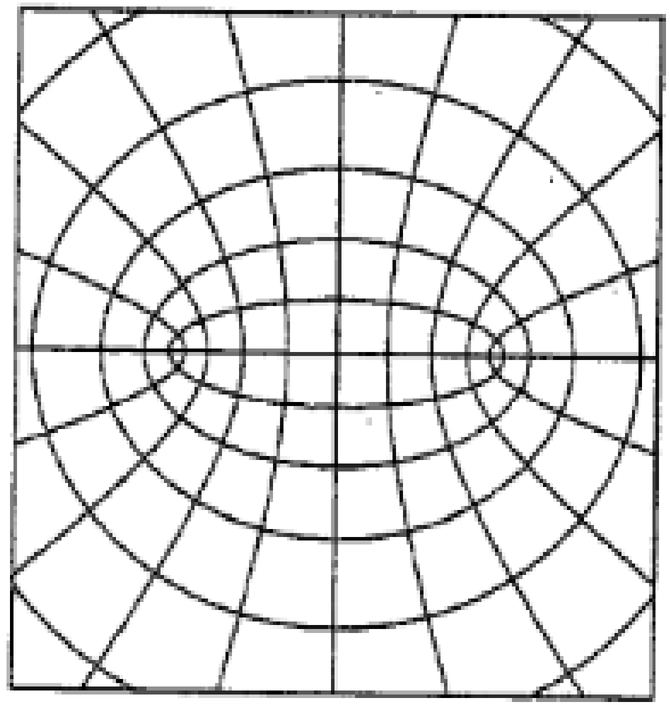
Определим область однолистности функции $w = \cos z$. Критические точки функции находятся из условия $w' = -\sin z = 0$, откуда $z = \pi n$. Во всех остальных точках комплексной плоскости функция $w = \cos z$ является локально - однолистной. Если в точках z_1 и z_2 функция принимает одинаковые значения, то

$$\cos z_1 - \cos z_2 = 0$$

или

$$\sin \frac{z_1 - z_2}{2} \sin \frac{z_1 + z_2}{2} = 0,$$

откуда либо $z_1 - z_2 = 2\pi n$, либо $z_1 + z_2 = 2\pi n$ $(n \in Z)$. Функция $\cos z$ однолистна в некоторой области, если наряду с любой ее точкой z_1 этой области не принадлежат точки $-z_1, 2\pi - z_1, -2\pi - z_1$. Этим условиям удовлетворяет, например, вертикальная полоса $0 < x < \pi$, или наклонная полоса $0 < x - ay < \pi$.



Фиг. 3.21. Отображение декартовой сети функцией $w = \cos z$

Пример:

Найти образы прямых: $x = C$ и $y = C$ при отображении: $\omega = ch(z)$

$\omega = ch(z) = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$ с учётом того, что: $z = x + iy$ имеем: $\omega = \dfrac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2}$.

Представим экспоненты в тригонометрической форме:

$$\omega = \frac{e^{x}(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y)}{2}$$

Отсюда действительная и мнимая части: $u = \dfrac{1}{2}\cos y\left(e^{x} + e^{-x}\right)$ $v = \dfrac{1}{2}\sin y\left(e^{x} - e^{-x}\right)$.

Зададим: $x = C \rightarrow u = \dfrac{1}{2}\cos y\left(e^{C} + e^{-C}\right)$ (3.11), $v = \dfrac{1}{2}\sin y\left(e^{C} - e^{-C}\right)$ (3.12). Чтобы связать зависимостью переменные v и u, возведём в квадрат обе части (3.11) и (3.12): $u^{2} = \dfrac{1}{4}\cos^{2} y\left(e^{C} + e^{-C}\right)^{2}$, $v^{2} = \dfrac{1}{4}\sin^{2} y\left(e^{C} - e^{-C}\right)^{2}$.

Обозначим: $a^{2} = \dfrac{1}{4}\left(e^{C} + e^{-C}\right)^{2}$, $b^{2} = \dfrac{1}{4}\left(e^{C} - e^{-C}\right)^{2}$ - $const$.

Тогда: $u^2 = a^2\cos^2 y$, $v^2 = b^2\sin^2 y$. Исключим переменную y: $u^2 = a^2\left(1-\sin^2 y\right)$,

$\sin^2 y = \dfrac{v^2}{b^2} \rightarrow u^2 = a^2\left(1-\dfrac{v^2}{b^2}\right) \rightarrow \dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}=1$ - множество эллипсом с полуосями: a,b

Зададим: $y = C \rightarrow u = \dfrac{1}{2}\cos C\left(e^x+e^{-x}\right)$ (3.13), $v = \dfrac{1}{2}\sin C\left(e^x-e^{-x}\right)$ (3.14).

Чтобы связать зависимостью переменные v и u, возведём в квадрат обе части (3.13) и (3.14): $u^2 = \dfrac{1}{4}\cos^2 C\left(e^x+e^{-x}\right)^2$, $v^2 = \dfrac{1}{4}\sin^2 C\left(e^x-e^{-x}\right)^2$.

Раскроем скобки $u^2 = \dfrac{1}{4}\cos^2 C\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)$, $v^2 = \dfrac{1}{4}\sin^2 C\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)$.

Выразим $\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$ из второго выражения:

$$\left(e^{2x}+e^{-2x}\right) = \frac{4v^2}{\sin^2 C}+2 \rightarrow u^2 = \frac{1}{4}\cos^2 C\left(\frac{4v^2}{\sin^2 C}+2+2\right)$$

$$\rightarrow u^2 = \cos^2 C\left(\frac{v^2}{\sin^2 C}+1\right) \rightarrow \frac{u^2}{\cos^2 C} = \left(\frac{v^2}{\sin^2 C}+1\right)$$

$\rightarrow \dfrac{u^2}{\cos^2 C} - \dfrac{v^2}{\sin^2 C} = 1$ - множество гипербол с полуосями: $\cos C, \sin C$.