ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Часть 1

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Производная функции комплексного переменного (ФКП), условия Коши - Римана, понятие регулярности ФКП.

Дифференцируемость элементарных ФКП.

Интегрирование по комплексному аргументу.

Свойства интеграла по комплексному аргументу.

Теорема Коши для односвязной области.

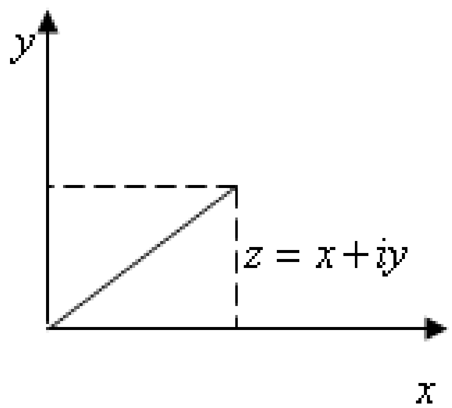
Теорема Коши для многосвязной области.

Интегральная формула Коши.

Интегральная формула коши для *n* - й производной.

Производная функции комплексного переменного (ФКП), условия Коши - Римана, понятие регулярности ФКП.

Изображение и вид комплексного числа.



Вид ФКП: $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$,

где U, V – действительная функция двух переменных (x, y),

U – действительная часть ФКП

V – мнимая часть ФКП,

y - мнимая ось, x - действительная ось

Производная ФКП.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{U(x+\Delta x,y+\Delta y)+iV(x+\Delta x,y+\Delta y)-}{(x+\Delta x)+i(y+\Delta y)-x-iy}$$

$$\frac{-\Delta U(x,y)-iV(x,y)}{}$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left[U(x+\Delta x,y+\Delta y)-U(x,y)\right]+i\left[V(x+\Delta x,y+\Delta y)-V(x,y)\right]}{\Delta x+i\Delta y}$$

1 случай: $\Delta y=0;\Delta x\to 0$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left[U(x+\Delta x,y)-U(x,y)\right]+i\left[V(x+\Delta x,y)-V(x,y)\right]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta xU+i\Delta xV}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta xU}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta xV}{\Delta x}\qquad f'(z)=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}\quad \textbf{(1)}$$

2 случай: $\Delta x=0;\Delta y\to 0$

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left[U(x,y+\Delta y)-U(x,y)\right]+i\left[V(x,y+\Delta y)-V(x,y)\right]}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta yU+i\Delta yV}{i\Delta y}=\frac{1}{i}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta yU}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta yV}{\Delta y}=\frac{1\cdot i}{\underbrace{i\cdot i}_{-1}}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial y}\qquad f'(z)=\frac{\partial V}{\partial y}-i\frac{\partial U}{\partial y}\quad \textbf{(2)}$$

Замечание: Если производная существует, то она единственна, то есть формула (1) и (2) равны.

Замечание: Два комплексных числа равны, если равны их соответствующие действительные и мнимые части.

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (3) \qquad\qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (4)$$

Формулы (3,4) называется условиями Коши-Римана, и определяют условие существования производной от ФКП.

Замечание: Если условия Коши-Римана выполняются, то производную от ФКП можно считать по любой из формул (1) или (2).

Определение: ФКП – называется регулярной или аналитической, если для него выполняются условие Коши-Римана.

Дифференцируемость элементарных ФКП.

1. $f(z)=z^2$

$$f(z)=(x+iy)^2=x^2+2xy+i^2y^2=(x^2-y^2)+i(2xy)\to \begin{matrix} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{matrix},$$

Условия Коши-Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\equiv\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x;\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=2y\equiv-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-(-2y)=2y$

Вывод: $f(z)=z^2$ **- регулярная ФКП.**

Производная: $f'(z)=2x+i2y=2(x+iy)=2z\to \quad (z^2)'=2z$

2. $f(z)=e^z\to f(z)=e^{x+iy}$

Используем формулу Эйлера: $e^{a+ib}=e^a(\cos b+i\sin b)$**, тогда:**

$$f(x)=e^x(\cos y+i\sin y)\to \begin{matrix} u=e^x\cos y \\ v=e^x\sin y \end{matrix}$$

Условия Коши-Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y\equiv\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y\equiv-\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^x\sin y$

Вывод: все элементарные ФКП являются регулярными.

Производная: $f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z \to (e^z)' = e^z$

3. $f(z) = \sin z$

Преобразуем формулу Эйлера: $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Зададим: $x = 0 \to e^{iy} = \cos y + i\sin y$.

$$y = z \to e^{iz} = \cos z + i\sin z \quad (1), \quad y = -z \to e^{-iz} = \cos z - i\sin z \quad (2);$$

$$(1)+(2) \to \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (3), \quad (1)-(2) \to \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \, (4)$$

$$f'(z) = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \to \quad (\sin z)' = \cos z$$

4. $f(z)=\cos z$.

$$f'(z)=\frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2}=\frac{i^2\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)}{2i}=-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-\sin z;\quad (\cos z)'=-\sin z.$$

5. $f(z)=tgz$

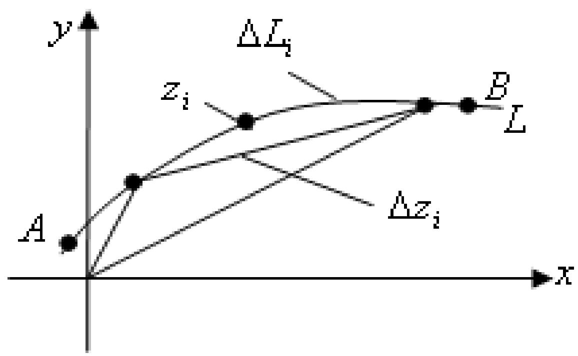
$$f(z)=\frac{\sin z}{\cos z};\quad f'(z)=\frac{\cos^2 z+\sin^2 z}{\cos^2 z}.$$

$$\cos^2 z+\sin^2 z=\frac{\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^2}{4}+\frac{\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)^2}{4i^2}=\frac{1}{4}\left(e^{2iz}+2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}-e^{2iz}+2e^{iz}e^{-iz}-e^{-2iz}\right)=\frac{1}{4}4=1\rightarrow$$

$$\rightarrow (tgz)'=\frac{1}{\cos^2 z}$$

Вывод: формулы дифференцирования ФКП остаются такими же, как и формулы дифференцирования функции действительного переменного.

Интегрирование по комплексному аргументу.



Дано: $f(z)$ - регулярная ФКП.

Требуется составить интервал по линии L.

Решение: Разобьём участок линии AB на n частей длиною ΔL_i. Внутри каждого участка выберем произвольную точку z_i и вычислим ФКП в данной точке.

Приближённо заменим участок кривой ΔL на длину вектора Δz_i.

Составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta z_i \quad (1)$$

Определение: Интегралом по комплексному аргументу или контурным интегралом называется предел интегральной суммы (1), если этот предел не зависит от способа разбиения на участки и выбора точки внутри каждого участка.

Обозначения контурного интеграла.

$$\int_L f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta z_i \quad (2)$$

Вычисление контурного интеграла.

$$f(z_i) = U(x_i, y_i) + iV(x_i, y_i) \quad (3) \qquad \Delta z_i = \Delta x_i + i\Delta y_i \quad (4)$$

Подставляем (3),(4) в (2):

$$\int_L f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(U+iV)(\Delta x + i\Delta y) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(U_i\Delta y + U\Delta x + iV\Delta x - V\Delta y) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(U\Delta x - V\Delta y) + i\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(V\Delta x + U\Delta Y)$$

Замечание: Каждый из этих пределов представляет собой линейный интеграл.

$$\int_L f(z)dz = \int_L [Udx - Vdy] + i\int_L [Vdx + Udy]$$

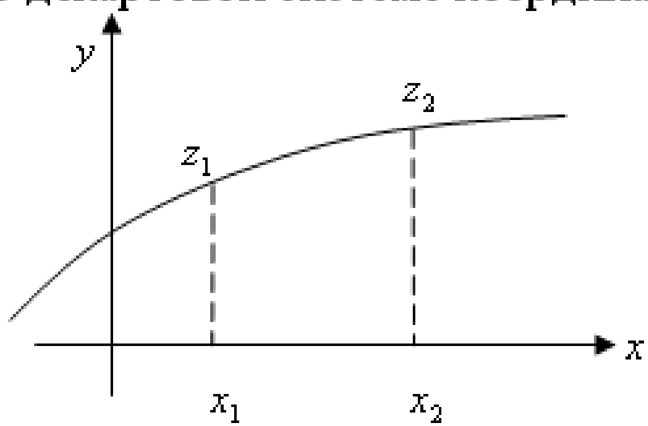
Специальные функции

$\mathrm{Re}(z) = x$ - функция выделения действительной части,

$\mathrm{Im}(z) = y$ - функция выделения мнимой части.

Способы задания линии L.

1. В декартовой системе координат $L: y = f(x)$ от т. z_1 до т. z_2.



$$z_1 = x_1 + iy_1$$
$$z_2 = x_2 + iy_2 \quad \to x \in [x_1, x_2]$$

Пример: $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L \mathrm{Re}(z)dz$, $L: y = x$, от т. $z_1(0,0)$ до т. $z_2(1,1)$

$\rightarrow x \in [0,1]$, $\mathrm{Re}(z) = x \rightarrow \int\limits_L xdz$

Используем формулу: $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L [Udx - Vdy] + i\int\limits_L [Vdx + Udy]$,

где для этого примера: $U = x$, $V = 0$.

$$\rightarrow \int\limits_L xdz = \int\limits_L [xdx] + i\int\limits_L [xdy]$$

Для вычисления полученных линейных интегралов используем формулу:

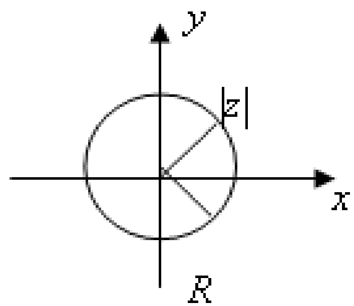
$$\int\limits_L [Xdx + Ydy] = \int\limits_a^b [X(x;y(x)) + Y(x;y(x) \cdot y'(x)]dx$$

$$\rightarrow \int\limits_L xdz = \int\limits_0^1 xdx + i\int\limits_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + i\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

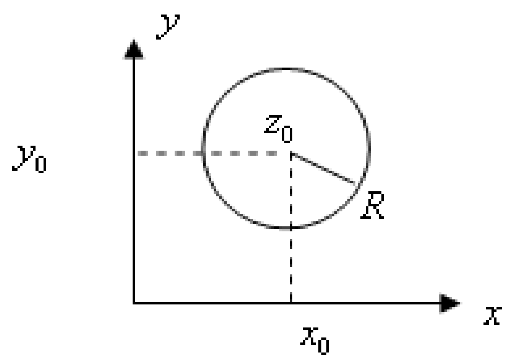
2. В параметрической форме и в полярной системе координат.

а) $L: |z| = R$ - окружность радиуса R с центром в начале координат.

$t = \phi \in [0, 2\pi]$



б) $L: |z - z_0| = R$ - окружность радиуса R с центром в точке: $z_0 = x_0 + iy_0$.



Пример: $\int_L f(z)dz = \int_L [(x+y) - ixy]dz$, $L: x=\cos t$, $y=\sin t$ - окружность $R=1$.

Используем формулу: $\int_L f(z)dz = \int_L [Udx - Vdy] + i\int_L [Vdx+Udy]$,

где для этого примера: $U=x+y$, $V=-xy$.

$$\to \int_L[(x+y)-ixy]dz = \int_L[(x+y)dx + xydy] + i\int_L[-xydx+(x+y)dx]$$

Для вычисления полученных линейных интегралов используем формулу:

$$\int_L[Xdx+Ydy] = \int_{t_н}^{t_к}[X(x(t);y(t))\cdot x'(t) + Y(x(t);y(t)\cdot y'(t)]dt$$

$$\int_L f(z)dz = 4\int_0^{\pi/2}\left[(\cos t+\sin t)(\underbrace{-\sin t}_{x'(t)}) + \cos t\sin t\underbrace{\cos t}_{y'(t)}\right]dt +$$

$$+i4\int_0^{\pi/2}[-\cos t\sin t(-\sin t)+(\cos t+\sin t)\cos t]dt =$$

$$\int_L f(z)dz = 4\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}\sin 2t - \sin^2 t + \sin t\cos^2 t\right]dt + 4i\int_0^{\pi/2}\left[\cos t\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]dt =$$

$$= 4\left(\frac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt + \underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin t\cos^2 t\,dt}_{I_1}\right) +$$

$$+4i\left(\int_0^{\pi/2}\cos t\sin^2 t\,dt + \underbrace{\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt}_{I_2} - \frac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}\right)$$

Замена: для I_1: $U=\sin t \to dU=\cos t\,dt;\quad t_Н=0,\ t_В=1$,

для I_2: $V=\cos t \to dV=-\sin t\,dt;\quad t_Н=1,\ t_В=0$

$$\int_L f(z)dz==4\left(\frac{1}{4}(-1-1)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 U^2dU\right)+4i\left(\int_0^1 V^2dV+\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{4}(-1-1)\right)=$$

$$=4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{U^3}{3}\Big|_0^1\right)+4i\left(\frac{V^3}{3}\Big|_0^1+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=-2-\pi-\frac{4}{3}-i\left(\frac{4}{3}+\pi+2\right)=-\frac{2}{3}-\pi+i\left(\frac{10}{3}+\pi\right).$$

Свойства интеграла по комплексному аргументу.

1. $\int\limits_{\overleftarrow{L}} f(z)\,dz = -\int\limits_{\overrightarrow{L}} f(z)\,dz$

2. $\int\limits_{L} cf(z)dz = c\int\limits_{L} f(z)dz$

3. $\int\limits_{L} [f_1(z) + f_2(z)]dz = \int\limits_{L} f_1(z)dz + \int\limits_{L} f_2(z)dz$

4. Если $L = L_1 +_2;$ $\quad \int\limits_{L} f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{L_2} f(z)dz$

5. Если ФКП является ограниченной функцией, т.е. $|f(z)| < M$, где $M = \max\{f(z)\}, \forall z \in L$, то контурный интеграл ограничен следующим значением:, $\left|\int\limits_{L} f(z)dz\right| \le M \times L$, где L -длина линии.

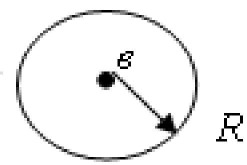
Теорема Коши для односвязной области.

Определение: Область называется односвязной, если она образованна одним замкнутым контуром.

Теорема: Контурный интеграл от регулярной во всех точках односвязной области ФКП по контуру этой области равен нулю.

Доказательство:

$$\int_L f(z)dz = \int_L [Udx - Vdy] + i\int_L [Vdx + Udy] \qquad L: |z - в| > R \quad \rightarrow$$



Линейный интеграл по замкнутому контуру называется циркуляцией и вычисляется по формуле Грина:

$$\oint_L [Xdx + Ydy] = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy;$$

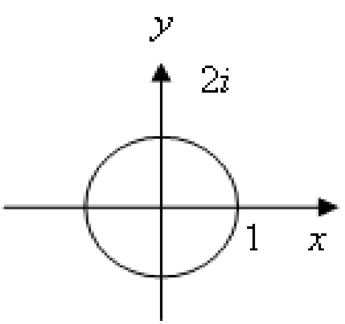
$$\int_L f(z)dz = \iint_D \left(-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right)dxdy \qquad (1)$$

По условию ФКП регулярная, значит, для неё выполняются условия Коши-Римана: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ **(2)** $\qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$ **(3)**

Подставляем (2,3) в интеграл (1)

$$\int_L f(z)dz = \iint_D \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

Замечание: Теорема Коши применяется, если точки в которых функция нерегулярна, расположены в не односвязной области.



Пример: $\oint \frac{z^2 dz}{z-2i} = 0 \qquad L: |z| = 1$

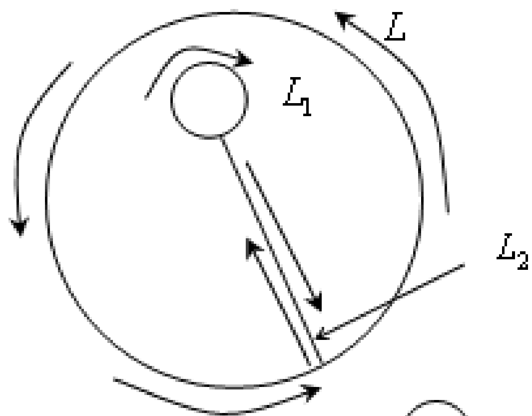
В точке $z = 2i$ – **ФКП нерегулярна.**

Теорема Коши для многосвязной области.

Определение: Область называется многосвязной, если внутри одного замкнутого контура расположен один или более других замкнутых контуров.

Теорема: Интеграл от регулярной ФКП во всех точках многосвязной области по внешнему контуру равен сумме контурных интегралов, вычисленных по каждому из внутренних контуров.

Доказательство:



Введём дополнительный контур: L_2.

Тогда получится: $L + L_2 + L_1 + L_2$ - односвязная область.

По теореме Коши интеграл по односвязной области равен нулю, а по 4 свойству контурных интегралов разбиваем интеграл по всему контуру на сумму 4-х интегралов:

$$\int_L f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz - \int_{L_1} f(z)dz - \int_{L_2} f(z)dz = 0 \rightarrow \int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz, ч.т.д.$$

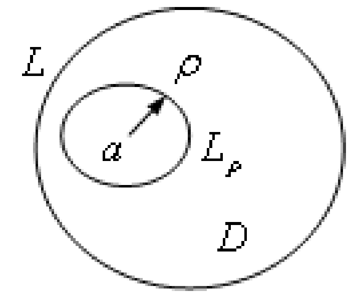
Замечание: Теорема Коши применяется для вычисления контурного интеграла по произвольному контуру через контурный интеграл по круговому контуру.

Интегральная формула Коши.

Замечание: Эта формула применяется, если точка, в которой подынтегральная ФКП нерегулярна, расположены внутри области, ограниченной замкнутой линией L.

Дано: $f(z)$ – ФКП, регулярная $\forall z \in D$, ограниченной замкнутой линией L.

Найти: $\int\limits_L \frac{f(z)}{z-a}dz = ?\quad (a \in D, a - const)$



Решение:

Выделим точку a окружностью бесконечно малого радиуса. $\rho \to 0$

В результате получим двусвязную область, для которой используем теорему Коши для многосвязной области (этот переход необходим, чтобы вместо произвольного контура получить круговой.

$$\int\limits_{L}\frac{f(z)}{z-a}dz=\int\limits_{L_\rho}\frac{f(z)}{z-a}dz=\int\limits_{L_\rho}\frac{f(z)-f(a)+f(a)}{z-a}dz=\int\limits_{L_\rho}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz+\int\limits_{L_\rho}\frac{f(a)}{z-a}dz=$$

$$=\underbrace{\int\limits_{L_\rho}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz}_{I_1}+f(a)\underbrace{\int\limits_{L_\rho}\frac{1}{z-a}dz}_{I_2}\quad (1)$$

Оценим значение интеграла I_1, возьмём его по модулю:

$$|I_1|=\left|\int\limits_{L}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right|$$

По пятому свойству контурного интеграла $|I_1|\le M\cdot L\rho$, где

$M=\max\{f(z)-f(a)\}, L_\rho=2\pi\rho$, где $\rho\to 0, тогда: L\rho\to 0, значит: |I_1|\to 0$

Вычислим интеграл $I_2\to\quad I_2=\int\limits_{L_\rho}\frac{1}{z-a}dz$

Используем показательную форму записи комплексного числа:

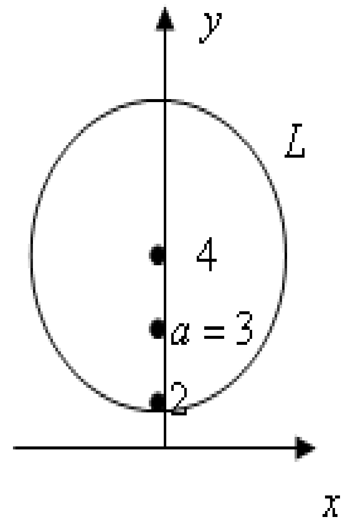
$z=re^{i\varphi}$ где r – модуль, φ – аргумент.

Замена: $z-a=re^{i\varphi}\to z=a+re^{i\varphi}\qquad dz=rie^{i\varphi}d\varphi\qquad \varphi_н=0;\varphi_в=2\pi$

$$I_2=\int\limits_0^{2\pi}\frac{rie^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}}d\varphi=i\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=i\varphi\Big|_0^{2\pi}=2\pi i\quad (2)$$

Подставляем $I_1=0$ и I_2 из (2) в (1): $\int\limits_{L}\frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i f(a)$.

Пример: $\int\limits_L \frac{e^z dz}{z(z-3i)}$, $L: |z-4i| = 2$



$a = 3i$, $f(z) = \frac{e^z}{z}$, $f(a) = \frac{e^{3i}}{3i}$.

$$\int\limits_L \frac{e^z dz}{z(z-3i)} = 2\pi i \frac{e^{3i}}{3i} = \frac{2}{3}\pi e^{3i}$$

Интегральная формула Коши для *n* - й производной.

Дано: $\int\limits_L \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a) \quad (1)$.

Продифференцируем левую и правую части формулы (1) по переменной a:

$$\int\limits_L \frac{-f(z)}{(z-a)^2}(-1)dz = \int\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz = 2\pi i f'(a) \quad (2)$$

Дифференцируем формулу (2): $2\int\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz = 2\pi i f''(a) \quad (3)$.

Дифференцируем формулу (3): $6\int\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^4}dz = 2\pi i f'''(a)$.

С учётом, что $2 \equiv 2!, \quad 6 \equiv 3!$ и т.д., получим в общем случае:

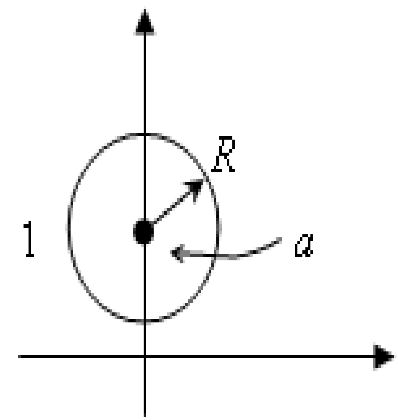
$$n!\int\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = 2\pi i f^{(n)}(a)$$

Тогда интегральная формула Коши для n -ной производной:

$$\int\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(a)}{n!}$$

Пример: $\int\limits_L \frac{\cos z dz}{(z-i)^3}$, $L: |z-i| = R - const.$

$a = i;\ f(z) = \cos z;\ n = 2$



$f'(z) = -\sin z$

$f''(z) = -\cos z$

$f''(a) = -\cos i$

$$\int\limits_L \frac{\cos z dz}{(z-i)^3} = \frac{2\pi i(-\cos i)}{2} = -\pi i \cos i$$