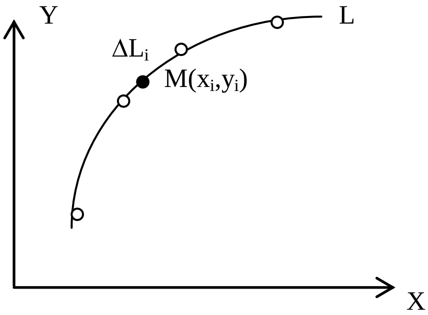
<u>Криволинейные интегралы.</u>

Понятие криволинейного интеграла 1 рода и его свойства.

(для задачи нахождение массы криволинейного стержня)



Дано: стержень в виде дуги L, в каждой точке которого задана плотность f(x,y).
Найти: массу криволинейного стержня M.

Решение: Разобьем дугу L на n частей длинной ΔL_i и выберем внутри каждой части произвольную точку $M(x_i,y_i)$. Будем считать на каждом участке ΔL_i плотность постоянной и равной значению плотности в точке $M(x_i,y_i)$, т.е. равной $f(x_i,y_i)$. Масса каждого участка равна произведению плотности на длину дуги: $m_i \approx f(x_i,y_i)\times \Delta L_i$.

Масса всего стержня: $M_i \approx \sum f(x_i,y_i)\times \Delta L_i$. (1)

Переходя к пределу, получим точное значение массы стержня: $\mathbf{M = \lim\limits_{n\to\infty} \sum f(x_i,y_i)\times \Delta L_i}$.

Определение: Криволинейным интегралом 1 рода называется предел интегральной суммы (1), если это предел не зависит от способа разбиение на участки и выбора точки внутри каждого участка.

Обозначение: $M = \int\limits_L \mathbf{f(x,y)\, dL} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum \mathbf{f(x_i,y_i)\times \Delta L_i}$.

Свойства

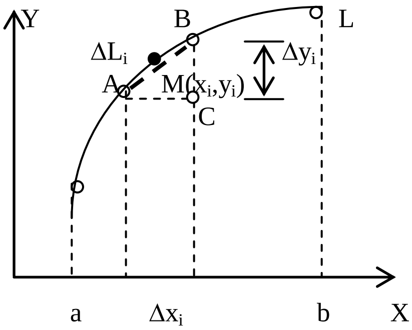
1. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла: $\int\limits_L C\, f(x,y)\, dL = C \int\limits_L f(x,y)\, dL$

2. Криволинейный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от каждой их этих функций:
$\int\limits_L [f_1(x,y)+ f_2(x,y)]\, dL = \int\limits_L f_1(x,y)\, dL+ \int\limits_L f_2(x,y)\, dL$

3. Дугу можно разбивать на отдельные части и криволинейный интеграл по всей дуге равен сумме интегралов по каждой их этих частей:
$\int\limits_L f(x,y)\, dL = \int\limits_{L_1} f(x,y)\, dL+ \int\limits_{L_2} f(x,y)\, dL$

Вычисление криволинейного интеграла 1 рода.

1. В декартовой системе координат.



Дано: L: $y = y(x)$, $x \in [a,b]$.

Решение: Разобьем дугу L на n частей длинной ΔL_i и выберем внутри каждой части произвольную точку $M(x_i,y_i)$. На каждом участке ΔL_i <u>заменим длину</u> на <u>отрезок AB</u> равный, как <u>гипотенуза</u> треугольника ABC, $\sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + \Delta y_i^{\,2}} = \Delta x_i \sqrt{1 + (\Delta y_i / \Delta x_i)^2} \approx \Delta L_i$.

Используем <u>теорему Лагранжа</u>: $\Delta y_i = y'(x_i)\, \Delta x_i$

$\Delta L_i \approx \Delta x_i \sqrt{1 + (y'(x_i))^2}$.

$$\int\limits_L f(x,y)\, dL = \lim\limits_{n\to\infty} \sum f(x_i,y_i)\times \Delta L_i = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \sum f(x_i,y_i) \sqrt{1 + (y'(x_i))^2}\, \Delta x_i}_{\text{Определенный интеграл на отрезке [a,b].}}$$

$$\mathbf{\int\limits_L f(x,y)\, dL = \int\limits_a^b f(x,y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx}$$

Замечание: вместо **y** подставляется уравнение линии L: y(x).

2. В параметрической форме.

В параметрической форме производная $y'(x)$ вычисляется по формуле: $y'(x) = y'(t) / x'(t)$, дифференциал $dx = x'(t)\,dt$ и, как при замене переменных, меняются пределы интегрирования $a = x(t_н)$, $b = x(t_в)$.

$$\int_L^b \mathbf{f(x,y)\,dL} = \int_a^b f(x,y)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \int_{t_н}^{t_в} f(x,y(t))\sqrt{1 + (y'(t) / x'(t))^2}\;x'(t)\,dt.$$

$$\int_L \mathbf{f(x,y)\,dL} = \int_{t_н}^{t_в} \mathbf{f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\;dt.}$$

Замечание: вместо **x, y** подставляется параметрические уравнения линии L: $y(t)$ и $x(t)$.

3. В полярной системе координат.

Связь полярной и декартовой систем координат записывается в виде: $x = r\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, где $r = r(\varphi)$. Тогда x и y можно рассматривать как параметрическое задание функции $x=x(\varphi), y=y(\varphi)$ с параметром φ.

$x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$, $\quad y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$.

$$(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2 = (r'(\varphi))^2\cos^2\varphi - 2\,r'(\varphi)\cos\varphi\; r(\varphi)\sin\varphi + (r(\varphi))^2\sin^2\varphi +$$
$$+ (r'(\varphi))^2\sin^2\varphi + 2\,r'(\varphi)\cos\varphi\; r(\varphi)\sin\varphi + (r(\varphi))^2\cos^2\varphi = (r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2.$$

В параметрической форме относительной аргумента φ:

$$\int_L \mathbf{f(x,y)\,dL} = \int_{\varphi_н}^{\varphi_в} f(x(\varphi),y(\varphi))\sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}\;d\varphi.$$

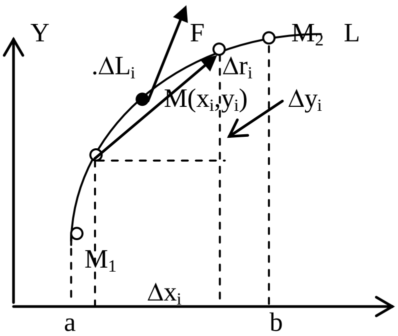
Подставляя $(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2$, получим:

$$\int_L \mathbf{f(x,y)\,dL} = \int_{\varphi_н}^{\varphi_в} \mathbf{f(r(\varphi)\cos\varphi,\, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\,d\varphi.}$$

Замечание: **r (φ)** - уравнение линии L.

Понятие криволинейного интеграла 2 рода и его свойства.

(для задачи нахождение работы по передвижению материальной точки)



Дано: дуга L, к каждой точке которой приложена сила F, меняющаяся и по величине и по направлению, т.е. являющейся функцией координат x,y.

Найти: Работу по передвижению материальной точки $M(x_i,y_i)$ от M_1 к M_2

Решение: Разобьем дугу L на n частей длинной ΔL_i, выберем внутри каждой части произвольную точку $M(x_i,y_i)$ и построим на каждой части вектор Δr_i.

Работа на каждом участке ΔL_i вычисляется через скалярное произведение силы на путь: $A_i \approx (F(x_i,y_i)\times \Delta r_i)$. Приближенное равенство засчет того, что положение силы зафисикровано в выбранной точке $M(x_i,y_i)$ и криволинейный путь по дуге ΔL_i заменен на прямолинейный путь по вектору Δr_i.

Работа по передвижению материальной точки $M(x_i,y_i)$ от M_1 к M_2 :

$A_i \approx \sum(F(x_i,y_i)\times\Delta r_i.)$ (1) Переходя к пределу, получим точное значение работы:

$$\mathbf{A = \lim_{n\to\infty} \sum(f(x_i,y_i)\times\Delta r_i).}$$

Определение: Криволинейным интегралом 2 рода или **линейным интегралом** называется предел интегральной суммы (1), если это предел не зависит от способа разбиение на участки и выбора точки внутри каждого участка.

Обозначение: $A = \int_L \mathbf{(F(x,y),dr) = \lim_{n\to\infty} \sum(F(x_i,y_i)\times \Delta r_i).\ (2)}$

Формула (2) является сокращенным обозначением линейного интеграла.

Представим вектор в координатной форме: $F(x,y) = X(x,y)\,\mathbf{i} + Y(x,y)\,\mathbf{j}$ (3), где координаты $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ являются функциями двух координат x,y. Вектор Δr_i в координатной форме имеет следующий вид: $\Delta r_i = \Delta x_i\,\mathbf{i} + \Delta y_i\,\mathbf{j}$ (4).

Вычислим скалярные произведения в левой и правой частях (2) как сумму произведений соответствующих координат векторов (3) и (4): $\int_L \mathbf{[X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = \lim_{n\to\infty} \sum[X(x_i,y_i)\,\Delta x_i + Y(x_i,y_i)\,\Delta y_i].\ (5)}$

Формула (5) является развернутым обозначением линейного интеграла.
Для этой формулы можно выделить два частных случая в зависимости от расположения вектора F(x,y):
1 частный случай: $F \,||\, y \rightarrow X(x,y) = 0 \rightarrow \int_L \mathbf{Y(x,y)\,dy} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum \mathbf{Y(x_i,y_i)\,\Delta y_i}$ **. (6)**

2 частный случай: $F \,||\, x \rightarrow Y(x,y) = 0 \rightarrow \int_L \mathbf{X(x,y)\,dx} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum \mathbf{X(x_i,y_i)\,\Delta x_i}$ **. (7)**

Свойства

1. Постоянный множитель можно выносить за знак линейного интеграла: $\int_L C\,(F(x,y),dr) = C \int_L (F(x,y),dr)$
2. Линейный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от каждой их этих функций: $\int_L (\{F_1(x,y)+ F_2(x,y)\},dr) = \int_L (F_1(x,y),dr)+ \int_L (F_2(x,y),dr)$
3. Дугу можно разбивать на отдельные части и линейный интеграл по всей дуге равен сумме интегралов по каждой их этих частей:
$\int_L (F(x,y),dr)= \int_{L_1} (F(x,y),dr)+ \int_{L_2} (F(x,y),dr)$

Определение: Циркуляцией вектора называется линейный интеграла по замкнутому контуру.
Циркуляция вектора обозначается: $\oint (F(x,y),dr$.
Замечание: Положительным направлением считается движение точки по дуге против часовой стрелки.

4. При смене направления движения линейный интеграл меняет знак.

Вычисление криволинейного интеграла 2 рода.

1. В декартовой системе координат.

Дано: L: $y = y(x)$, $x \in [a,b]$. (смотри рисунок предыдущего вопроса)

$$\int_L \mathbf{[X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy]} = \lim_{n\to\infty} \sum \mathbf{[X(x_i,y_i)\,\Delta x_i + Y(x_i,y_i)\,\Delta y_i\,]}. \ \mathbf{(5)}$$

Для формулы (5) используем теорему Лагранжа: $\Delta y_i = y'(x_i)\,\Delta x_i$

$$\int_L [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = \lim_{n\to\infty} \sum[X(x_i,y_i)\,\Delta x_i + Y(x_i,y_i)\,y'(x_i)\,\Delta x_i] = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum[X(x_i,y_i) + Y(x_i,y_i)\,y'(x_i)]\,\Delta x_i}_{\text{Определенный интеграл на отрезке [a,b].}}\,.$$

$$\int_L \mathbf{[X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy]} = \int_a^b \mathbf{[X(x,y(x)) + Y(x,y(x))\,y'(x)]\,dx} \ \mathbf{(8)}$$

Замечание: вместо **y** подставляется уравнение линии L: y(x).

2. В параметрической форме.

В параметрической форме производная $y'(x)$ вычисляется по формуле: $y'(x) = y'(t)\ /\ x'(t)$,
дифференциал $dx = x'(t)\,dt$ и, как при замене переменных, меняются пределы интегрирования $a = x(t_н)$, $b = x(t_в)$.

$$\int_L [X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy] = \int_{t_н}^{t_в} [X(x(t),y(t)) + Y(x(t),y(t))\,y'(t) / x'(t)]\ \ x'(t)\,dt$$

$$\int_L \mathbf{[X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy]} = \int_{\mathbf{t_н}}^{\mathbf{t_в}} \mathbf{[X(x(t),y(t))\ \ x'(t) + Y(x(t),y(t))\,y'(t)]\ \ dt} \ \mathbf{(9)}$$

Замечание: вместо **y** подставляется параметрические уравнения линии L: y(t) и x(t).

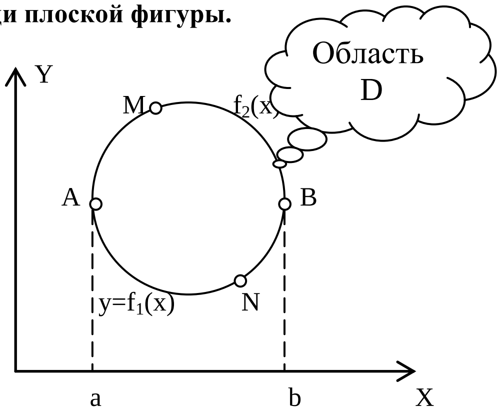
3. В полярной системе координат.

Связь полярной и декартовой систем координат записывается в виде: $x = r\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, где $r = r(\varphi)$. Тогда x и y можно рассматривать как параметрическое задание функции $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$ с параметром φ.
$x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$, $\qquad y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$.
Подставляя $x'(\varphi)$ и $y'(\varphi)$ в (9), получим (с заменой буквы t на букву φ):

$$\int_L \mathbf{[X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy]} = \int_{\boldsymbol{\varphi_н}}^{\boldsymbol{\varphi_в}} \mathbf{[X(x(t),y(t))\,\{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi\} + Y(x(t),y(t))\,\{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi\}]\ \ dt} \ \mathbf{(10)}$$

Замечание: **r (φ)** - уравнение линии L.

Приложение циркуляции для вычисления площади плоской фигуры.



Дано: Плоская фигура – область D, ограниченная линией L, которая образована функциями $y=f_2(x)$ и $y=f_1(x)$ на отрезке [a,b].
Найти: Площадь плоской фигуры – S.
Решение: Площадь плоской фигуры – S через определенный интеграл вычисляется по формуле:

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx$$

Интеграл S_2 соответствует 2 частному случаю вида линейного итеграла
$\to S_2 = -\int_{AMB} y\,dx$ (минус за счет движения по AMB по часовой стрелки)

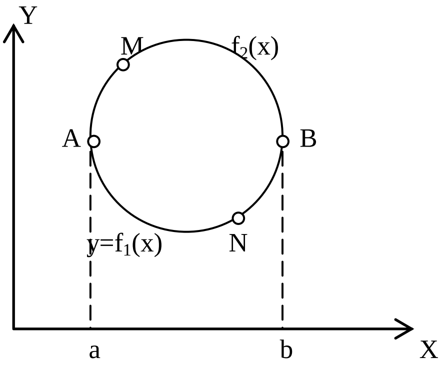
Интеграл S_1 также соответствует 2 частному случаю вида линейного итеграла
$\to S_1 = \int_{ANB} y\,dx$

Тогда площадь плоской фигуры $S = S_2 - S_1 = -\int_{AMB} y\,dx - \int_{ANB} y\,dx$. Но AMB+ANM составляет всю линию L, которая ограничивает область D.
Тогда сумма двух линейных интегралов составит циркуляцию по линии L и площадь плоской фигуры будет вычисляться по формуле: $S = -\oint_L y\,dx$ (11)

Аналогично можно составить площадь по направлению **y** через циркуляцию по линии L по формуле: $S = \oint_L x\,dy$ (12)

Вычислив среднее арифметическое (11) и (12), получим формулу площади через циркуляцию $\mathbf{S = \oint_L [-y\,dx + x\,dy]}$

Формула Грина



Дано: Правильная область D, ограниченная линией L, которая образована функциями $y=f_2(x)$ и $y=f_1(x)$ на отрезке [a,b].
Найти: Связь между циркуляцией и двойным интегралом по области D.
Решение: Рассмотрим двойной интеграл и вычислим его через двукратный:

$$\iint_D \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\,dy\,dx = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} d\,X(x,y)\,dx =$$

$$= \int_a^b X(x,y)\Big|_{f_1(x)}^{f2(x)} dx = \int_a^b [\,X(x, f_2(x)) - X(x, f_1(x))\,]\,dx =$$

$$\int_a^b X(x, f_2(x))\,dx - \int_a^b X(x, f_1(x))\,]\,dx = I_2 - I_1 \quad (13)$$

Интеграл I_2 соответствует 2 частному случаю вида линейного итеграла
$\to I_2 = -\int_{AMB} X(x,y)\,dx$ (минус засчет движения по AMB по часовой стрелки)

Интеграл I_1 также соответствует 2 частному случаю линейного итеграла $\to I_1 = \int_{ANB} X(x,y)dx$. Подставляем I_1 и I_2 в (13):

$$\iint_D \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{AMB} X(x,y)\,dx - \int_{ANB} X(x,y)\,dx$$

Но AMB+ANM составляет всю линию L, которая ограничивает область D. Тогда сумма двух линейных интегралов составит циркуляцию по линии L:

$$\iint_D \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_L X(x,y)\,dx \quad (14)$$

Аналогично можно составить двойной интеграл по направлению **y** через циркуляцию по линии L по формуле:

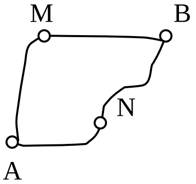
$$\iint\limits_D \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}\, dx\, dy = \oint\limits_L Y(x,y)\, dy \quad (15)$$

Вычитая из (15) формулу (13), получим**:**

$$\boldsymbol{\oint\limits_L [X(x,y)\, dx + Y(x,y)\, dy] = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} \right) dx\, dy} \qquad \textbf{(16) - формула Грина}$$

Условие независимости линейного интеграла от пути интегрирования

Сначала определим, что следует из того, если предположить, что линейный интеграл не зависит от пути интегрирования, т.е. от движения от точки A к точке B по двум <u>любым</u> кривым AMB и ANB.



Вычислим линейные интегралы по двум любым кривым AMB и ANB:

$$-\int\limits_{AMB} [X(x,y)\, dx + Y(x,y)\, dy] \quad (17)$$ (минус засчет движения по AMB по часовой стрелки)

$$\int\limits_{ANB} [X(x,y)\, dx + Y(x,y)\, dy] \quad (18)$$

Из начального предположения следует, что интегралы (17) и (18) равны:

$$-\int\limits_{AMB} [X(x,y)\, dx + Y(x,y)\, dy] = \int\limits_{ANB} [X(x,y)\, dx + Y(x,y)\, dy] \rightarrow \int\limits_{AMB} [X(x,y)\, dx + Y(x,y)\, dy] + \int\limits_{ANB} [X(x,y)\, dx + Y(x,y)\, dy] = 0$$

Но AMB+ANM составляет всю линию L, которая ограничивает область D. Тогда сумма двух линейных интегралов составит циркуляцию по линии L:

$$\boldsymbol{\oint\limits_L [X(x,y)\, dx + Y(x,y)\, dy] = 0}$$

Вывод: Циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.
Рассмотрим теорему, определяющую условия, при которых справедлив этот вывод.

Терема: Если в некоторой области D, ограниченная линией L, функции X(x,y),Y(x,y) и их частные производные непрерывны, то, для того, чтобы циркуляция по любому замкнутому контуру была равна нулю, необходимо и достаточно выполнение следующего условия во всех точка области D:

$$\boldsymbol{\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}} \qquad \textbf{(19)}$$

Доказательство:

Вычислим циркуляцию по формуле Грина (16):

$$\boldsymbol{\oint\limits_L [X(x,y)\, dx + Y(x,y)\, dy] = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} \right) dx\, dy} \qquad \textbf{(16)}$$

Необходимое условие

Пусть условие (19) выполняется, тогда подынтегральная функция, стоящая в круглых скобках, в двойном интеграле (16) будет равна нулю, значит двойной интеграл в (16) равен нулю, значит циркуляция в (16) равна нулю, ч.т.д.

Достаточное условие

Пусть циркуляция в (16) равна нулю, значит двойной интеграл в (16) равен нулю, тогда подынтегральная функция, стоящая в круглых скобках, в двойном интеграле (16) будет равна нулю, значит условие (19) выполняется, ч.т.д.