Ряды

Числовой ряд и его сумма.

Определение: Числовым рядом называется сумма членов бесконечной числовой последовательности.

Определение: Общим членом ряда называется такое его слагаемое, для которого можно составить функцию его порядкового номера.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots a_n=\frac{1}{n} \qquad a_n -\text{ общий член}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} -\text{ гармонический ряд}$$

Определение: Частичной суммой ряда называется сумма первых n членов этого ряда.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n \quad (\forall n \in N)$$

Определение: Суммой ряда называется предел его частичной суммы $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Определение: Ряд называется сходящимся, если предел его любой частичной суммы существует и конечен.

Определение: Ряд называется расходящимся, если предел его частичной суммы не существует или бесконечен.

Ряд составленный из членов геометрической прогрессии (РГП).

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} ,$$

где a_1- 1-ый член ряда, q- знаменатель.

Составим частичную сумму: $S_n = a_1 + a_1 q + ... + a_1 q^{n-1}$ (1)

Умножим левую и правую части (1) на q: $qS_n = a_1 q + ... + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$ (2).

Вычитаем (2) из (1) $\rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n) \rightarrow S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

Например:

Легенда: Изобретателю шахмат эмир пообещал любую награду. Изобретатель предложил эмиру на 1 клетку шахматной доски положить 1 зерно, на вторую клетку в 2 раза больше и т.д.

$$n = 64 \quad a_1 = 1 \quad q = 2 \rightarrow S_{64} = \frac{2^{64}-1}{2-1} \approx 1,8 \cdot 10^{19}$$

Вычислим предел частичной суммы для исследования ряда на сходимость:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \lim_{n\to\infty}(1-q^n)$$

1-й случай: $|q| < 1$, пусть $q = \dfrac{1}{2} \rightarrow \dfrac{a_1}{1-q} \lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^n}) = \dfrac{a_1}{1-q} -$ конечное число.

2-й случай: $|q| > 1 \rightarrow \dfrac{a_1}{1-q} \lim(1-q^n) = \infty \rightarrow$ ряд расходится.

3-й случай: $q = 1 \rightarrow S_n = \underbrace{a_1 + ... + a_1}_{n-раз} = na_1$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na_1 = \infty \rightarrow$ ряд расходится.

4-й случай: $q = -1$ $\quad \begin{matrix} S_n = a_1 - a_1 + a_1 = a_1 \\ S_n = a_1 - a_1 = 0 \end{matrix}$

Предел от составленной частичной суммы не существует т.к. эта функция не однозначна, а предел должен быть единственен.

Вывод: РГП – сходится, если $|q| < 1 \rightarrow S = \dfrac{a_1}{1-q}$ и расходится, если $|q| \geq 1$.

Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд.

Теорема: Если числовой ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю.

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{ сходится} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S \quad (\forall n)$$

$$-\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \end{cases}$$

— — — — — — — — — — — —

$$S_n - S_{n-1} = a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Замечание: Необходимый признак не является достаточным.

Замечание: Если предел $a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Гармонический ряд.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (1) $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \to$ необходимый признак выполняется.

$$\underset{(n=\infty)}{S_n^{(n)}} = (1 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8})$$

Составим частичную сумму для вспомогательного ряда

$$S_n^{(2)} = \underbrace{(1 + \frac{1}{2})}_{a_1^{(2)}} + \underbrace{(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})}_{a_2^{(2)}} + \underbrace{(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8})}_{a_3^{(2)}}$$

$$S_1^{(2)} = 1 + \frac{1}{2}\ ; \quad S_2^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2\cdot\frac{1}{2} + 1\ ; \quad S_3^{(2)} = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\to S_n^{(2)} = 1 + \frac{1}{2}\cdot n$$

$\lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{n}{2}) = \infty \Rightarrow$ второй ряд расходится

Из сравнения видно, $S_n^{(1)} \rangle S_n^{(2)} \Rightarrow$ первый ряд больше второго, сумма второго ряда бесконечна $\Rightarrow$ сумма первого ряда бесконечна $\Rightarrow$ первый ряд расходится.

Вывод: Гармонический ряд является расходящимся.

Свойства сходящихся числовых рядов.

1-е свойство: Если числовой ряд сходится, то прибавление или вычитание конечного числа членов ряда не меняет его сходимость, а перестановка конечного числа членов ряда не меняет ни сходимость, ни сумму этого ряда.

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - сходится \to \lim_{n\to\infty} S_n = S; \quad S_n = \underbrace{a_1 + \ldots + a_k}_{S_k} + \underbrace{a_{k+1} + \ldots + a_n}_{S_{kn}}.$$

$$S_n = S_k + S_{kn} \to \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_k + \lim_{n\to\infty} S_{kn}; \quad S = S_k + \lim_{n\to\infty} S_{kn} \to \lim_{n\to\infty} S_{kn} = S - S_k = S^{(kn)} - конечное\ число.$$

Частичная сумма S_{kn} соответствует ряду, полученному из исходного, если из него убрать первые k-слагаемые, этот ряд сходится, т.к. предел его частичной суммы конечное число $\to$ сходимость не изменится, если из ряда вычесть конечное число членов этого ряда $\to S = S_k + S^{(kn)} = S^{(kn)} + S_k \to$

сумма ряда не изменится при перестановки конечного числа членов ряда.

Под $S^{(kn)}\ и\ S_k$ скрываются суммы членов ряда, значит, от перестановки конечного числа членов ряда сумма и сходимость не меняются.

2-е свойство: Произведение сходящегося ряда на константу образует сходящийся ряд.

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - сходится\ (1) \to \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = S^{(1)}; \ S_n^{(1)} = a_1 + \ldots + a_n \quad c - const \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n \quad (2).$$

$$S_n^{(2)} = ca_1 + \ldots + ca_n = c(a_1 + \ldots a_n) = cS_n^{(1)}; \quad \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = c \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = cS^{(1)} = S^{(2)} - конечное\ число \to$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \to \ S^{(2)} = c \cdot S^{(1)}$$

3-е свойство: Сумма двух сходящихся рядов образует сходящийся ряд.

Доказательство:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n - сходится \to \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = S^{(1)}; \ S_n^{(1)} = a_1 + \ldots + a_n$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n - сходится \ \to \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S^{(2)}; S_n^{(2)} = b_1 + \ldots + b_n$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \to S_n^{(3)} = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) = (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(3)} = \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} + \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S^{(1)} + S^{(2)} = S^{(3)} - конечное\ число \to$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\to\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)\to S^{(3)}=S^{(1)}+S^{(2)}$$

Понятие знакоположительного ряда. Лемма о его сходимости.

Определение: Знакоположительным называется ряд, у которого все члены положительные.

Лемма: Для того, чтобы знакоположительный числовой ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы частичная сумма была ограниченна.

Доказательство:

Необходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n -$ сходится $(a_n>0)\to\lim_{n\to\infty}S_n=S$.

Ряд знакоположительный $\to(S_n>0,S>0)\to S_n<S\to$

$\to S_n -$ ограниченная функция, т.к. удовлетворяет условию ограниченности: $|f(x)|<M>0$

Достаточность: $S_n -$ ограниченность $\Rightarrow S_n<S, S_1<S_2<S_3\ldots<$ $\to$ частичная сумма представляет монотонно возрастающую и сверху ограниченную функцию $\to$ по признаку Вейерштрасса эта функция имеет предел

$\to\lim_{n\to\infty}S_n=S\to$ ряд сходится.

№24 Два признака сравнения для оценки сходимости знакоположительного ряда.

Признак сравнения:

Если для двух знакоположительных рядов $\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n$ (1); $\sum_{n\to 1}^{\infty} b_n$ (2), начиная с некоторого номера *к* выполняется следующее условие: $a_n \le b_n$ $(\forall n = k, \infty)$ (3), то:

1) Ряд (1) сходится при условии сходимости большего ряда (2).
2) Ряд (2) расходится при условии расходимости меньшего ряда (1).

Доказательство:

Составим из ряда (2) дополнительный ряд: $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ (4). Пусть 2-й ряд сходится, значит по 1-му свойству сходящихся рядов, будет сходиться и 4-й ряд. Составим из 1-го ряда дополнительный ряд: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ (5). Из условия (3) следует, что $S_n^{(5)} \le S_n^{(4)}$.
Если 4-й ряд сходится, то по лемме его частная сумма ограничена
$S_n^{(4)} < S^{(4)} \to S_n^{(5)} < S^{(4)} \to S_n^{(5)}$ - ограниченная, значит, по лемме сходится 5-й ряд, значит, по 1-му свойству сходящихся рядов будет сходиться и 1-й ряд.

Пусть 1-й ряд расходится, значит: расходится и 5-й ряд, $\to S_n^{(5)} \to \infty$. Из условия (3) следует: $S_n^{(5)} < S_n^{(4)} \to S_n^{(4)} \to \infty$.
Вывод: Значит: 4-й и 2-й ряды расходятся.

Порядок исследования на сходимость по признаку сравнения.

1) Исследуемый ряд считаем рядом (1) и для него подбираем сходящийся ряд (2). Если для этих рядов выполняется условие (3), то исходный ряд сходится, в противном случае переход ко второму пункту.
2) Исследуемый ряд обозначаем как ряд (2) и для него подбираем расходящийся ряд (1). Если для этих рядов выполняется условие (3), то исходный ряд расходится. В противном случае переход к п.3.
3) Признак не применим, исходный ряд требуется исследовать по другим признакам.

Недостатки признака сравнения:

1) Требуется 1 или 2 дополнительных ряда с известными свойствами.
2) Требуется вычислять значения членов ряда для поиска такого номера (к), начиная с которого будет выполняться условие (3).

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=S^{(1)}$

$$S^{(1)}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}+\dots$$

Сравним со сходящимся РГП: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=S^{(2)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$

$S^{(1)}>S^{(2)}\to$условие (3) не выполняется, переходим к п.2.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=S^{(3)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots\to S^{(1)}>S^{(3)}\to$ условие (3) выполняется и исходный ряд (1) расходится.

Предельный признак сравнения.

Если для 2-х знакоположительных рядов (1) и (2) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c\neq 0,\infty$, то эти ряды одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c\to\frac{a_n}{b_n}\leq c\to a_n\leq cb_n$, пусть 2-й ряд сходится, тогда по 2-му свойству сходящихся рядов будет сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty}cb_n$, значит по признаку сравнения исходный ряд (1) сходится.

Порядок исследования на сходимость по предельному признаку:

1. Для исходного ряда подбирается сходящийся и вычисляется предел с. Если $c\neq 0,\infty$, то исходный ряд сходится, в противном случае п.2.
2. Для исходного ряда подбирается расходящийся ряд и вычисляется с. Если $c\neq 0,\infty$ то исходный ряд расходится, в противном случае п.3.
3. Признак не применим, необходимо использовать другой признак.

Недостаток этого признака:

Требуется 1 или 2 ряда с известными свойствами.

Пример: $\sum_{n\to\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Сравним со сходящимся РГП: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{2n+1}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$$

Используем 2-й замечательный предел: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{nx}=e^{kn}$

$$c=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^n=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n}=e^{\frac{1}{2}}\neq 0,\infty\to$$ значит ряд исходный ряд сходится.

<u>Признаки сходимости знакоположительного ряда: Даламбера, Коши и интегральный признак Коши.</u>

Признак Даламбера.

Если для знакоположительного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ существует предел

$C=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, то:

$$\begin{cases}\text{сходится} & \text{– при } C<1\\ \text{расходится} & \text{– при } C>1\\ \text{признак неприменим} & \text{– при } C=1\end{cases}$$

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}e^{3n-1}$

$a_{n+1}=e^{3(n+1)-1}=e^{3n+2}\to\ C=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{3n+2}}{e^{3n-1}}=e^3>1-$ ряд расходится.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$C=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1-$ ряд сходится.

Признак Коши.

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел,

$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ то: $\begin{cases} \text{сходится} & \text{– при C<1} \\ \text{расходится} & \text{– при C>1} \\ \text{признак неприменим} & \text{– при C =1} \end{cases}$

Замечание: признак Коши применяется в том случае, если общий член ряда содержит степень кратную n.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ $\quad C = \lim_{n\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 -$ ряд сходится

Интегральный признак Коши.

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует несобственный интеграл $\int_c^{\infty} a_n dn$ (c-const), то:

$\begin{cases} \text{ряд сходится, если несобственный интеграл сходится} \\ \text{ряд расходится, если несобственный интеграл расходится } (\infty) \\ \text{признак неприменим, если интеграл не вычисляется} \end{cases}$

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} -$ ряд Дирихле (p- const)

Если p = 1, то ряд Дирихле даёт гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} -$ расходится

Применим интегральный признак:

$$\int_c^{\infty}\frac{1}{n^p}dn = \lim_{b\to\infty}\int_c^b n^{-p}dn = \lim_{b\to\infty}\frac{n^{-p+1}}{1-p}\bigg|_c^b = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(b^{-p+1} - c^{-p+1}) = I$$

1 случай: $p > 1 \to 1-p < 0 \to I = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(\underbrace{\frac{1}{b^{p-1}}}_{0} - c^{1-p}) = -\frac{c^{1-p}}{1-p} \neq \infty \to$

I сходится, → сходится ряд

2 случай: $p < 1 \to 1-p > 0 \to I = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(\underbrace{b^{1-p}}_{\infty} - c^{1-p}) = \infty \to$

I расходится, → расходится ряд.

Знакочередующийся ряд. Признаки сходимости: Лейбница и Абеля-Дирихле.

Определение: Знакочередующимся называется такой ряд, у которого знаки «+» и «-» чередуются между собой.

Обозначения знакочередующихся рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \quad (a_n > 0)$ - начинается со знака «+»
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n b_n \quad (a_n, b_n > 0) - \textit{начинается со знака минус}$

Признак Лейбница:

Если для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $(a_n > 0)$ выполняются следующие условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ (монотонное убывание).
2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (необходимый признак сходимости ряда), то ряд сходится.

Если одно из этих условий не выполняется, то ряд расходится.

Доказательство:

Исследуем 2 соседних чётные частные суммы.
$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$
Каждая из скобок согласно условию (1) положительная, значит $S_{2n} > 0$
Туже частичную сумму представим в другом виде:
$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - a_{2n} \rightarrow S_{2n} < a_1$ (т.к. из положительного a_1 вычитаются положительные числа).
$S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \rightarrow S_{2n} < S_{2n+2} \rightarrow$чётная частичная сумма представляет собой монотонную возрастающую и ограниченную сверху функцию, значит, по признаку Вейерштрасса, эта функция имеет предел $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$.
Вычислим нечётную частичную сумму: $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$
$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 \leftarrow (\textit{по}\, 2 - \textit{му условию}) = S$

Вывод: Предел любой частичной суммы существует, значит, ряд расходится.

Определение: Знакочередующимся рад называется абсолютно сходящимся, если он сам сходится и сходится ряд, составленный из модулей.

Определение: Знакочередующимся рад называется условно сходящимся, если он сам сходится, а ряд, составленный из модулей, расходится.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...\to$ выполнено. 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\to$ выполнено $\to$ исходный ряд сходится.

Составим ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд $\to$ ряд из модулей расходится $\to$ исходный ряд сходится условно.

Признак Абеля-Дирихле.

Если для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n b_n \quad (a_n, b_n > 0)$, выполняются следующие условия: 1) $a_1 > a_2 > a_3 > ...$; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; 3) Частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - ограничена, то ряд сходится.

Замечание: Этот признак применяется в том случае, если общий член ряда имеет достаточно громоздкую структуру и разбивается на произведение 2-х частей a_n $и$ b_n.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\pi \mathrm{n}}{\mathrm{n}^2}$

$a_n=\frac{1}{n^2};\ b_n=\cos\pi n$

1) $1>\frac{1}{4}>\frac{1}{9}>...\to$ выполняется; 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\to$ выполняется;

2) Частная сумма ограничена т.к. косинус является ограниченной функцией $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\pi n$. $\to$ исходный ряд сходится.

Составим ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos\pi_n|}{n^2}\to\ \frac{|\cos\pi_n|}{n^2}\le\frac{1}{n^2};$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - ряд Дирихле сходится.

По признаку сравнения сходится ряд, составленный из модулей $\to$ исходный ряд сходится абсолютно.

Знакопеременный ряд. Достаточный признак его абсолютной сходимости.

Определение: знакопеременным называется такой ряд, у которого знаки (+) и (–) располагаются в произвольном порядке.

Достаточный признак абсолютной сходимости.

Если для знакопеременного ряда сходится ряд составленный из модулей, то он является абсолютно сходящимся.

Доказательство:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) - исходный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (2) – сходящийся по условию

Составим дополнительные ряды, состоящие отдельно из положительных членов исходного ряда и модулей отрицательных членов этого ряда.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(+)}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n^{(-)}\right|$ (4)

Сумма (3) и (4) рядов даёт сходящийся ряд (2), значит по (3) свойству сходящихся рядов ряды (3) и (4) сходится $\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(3)} = S^{(3)}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(4)} = S^{(4)}$

Разность (3) и (4) ряда даёт (1) ряд, значит,
$S_n^{(1)} = S_n^{(3)} - S_n^{(4)} \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(3)} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(4)} = S^{(3)} - S^{(4)} = S^{(1)} \rightarrow$ конечное число, значит, (1) ряд сходится, причём абсолютно.

Знакопеременный ряд, достаточный признак его условной сходимости.

Определение: Знакоперменным называется ряд, у которого знаки «+» и « - » располагаются в произвольном порядке.

Достаточный признак условной сходимости.

Если для знакопеременного ряда расходятся ряды, составленные отдельно из положительных и модулей отрицательных членов ряда, то ряд условно сходится.

Доказательство:

По определению условной сходимости:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) - исходный ряд сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (2) - расходится.

Составим дополнительные ряды, состоящие отдельно из положительных членов исходного ряда и модулей отрицательных членов этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(+)} \quad (3) \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n^{(-)}\right| \quad (4)$$

Используем метод от противного, т.е. предполагаем, что:

1) (3) и (4) ряды сходятся, сумма этих рядов по третьему свойству сходящихся рядов должна дать сходящийся ряд, но сумма этих рядов составляет второй ряд, который расходится, получим противоречие условию.

2) Пусть (3) - сходится, (4) – расходится. Разность (3) и (4) ряда дает «$-\infty$», но эта разность составляет (1) ряд, который сходится, получили противоречие условию.

3) Пусть (3) - расходится, (4) – сходится. Разность (3) и (4) ряда дает «∞», но эта разность составляет (1) ряд, который сходится, получили противоречие условию.

Вывод: Значит (3) и (4) ряды должны одновременно расходиться.

Пример: $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)$ условно сходится.

Составим дополнительные ряды, состоящие отдельно из положительных членов исходного ряда и модулей отрицательных членов этого ряда

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1} \rightarrow$расходится; (4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1} \rightarrow$расходится.

Для подтверждения расходимости рядов (3) и (4) используем интегральный признак Коши:

$\int_c^{\infty}\frac{1}{n\pm1}dn = \lim_{b\to\infty}\int_c^{b}\frac{1}{n\pm1}dn = \lim_{b\to\infty}\ln|n\pm1|\Big|_c^b = \lim_{b\to\infty}(\ln|b\pm1| - \ln|c\pm1|) = \infty$ - расходящийся интеграл.

Вывод: исходный ряд условно сходится.

Понятие функционального ряда. Мажорируемый ряд.

Определение: Функциональным рядом называют такой ряд, у которого каждый его член является функцией одного переменного.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Замечание: При каждом значении x функциональный ряд преобразуется в числовой.

Определение: Значение x, при котором получается сходящийся числовой ряд называется точкой сходимости функционального ряда.

Например: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{n^2}$ $\quad x=1 \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}-$ ряд Дирихле для случае степени больше значения 2 - сходится $\to x=0$ точка сходимости.

Определение: Совокупность точек сходимости образуют область сходимости функционального ряда.

Например: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Сравним этот ряд с РГП. $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n \to a_1=1; q=x$ РГП - сходится, если $|q|\langle 1 \Rightarrow |x|\langle 1$

$\to -1\langle x \langle 1 \to x \in (-1;1)-$ область сходимости.

Для РГП известна его сумма $S=\frac{a_1}{1-q} \to$

$S=\frac{1}{1-x} \to$ сумма функционального ряда является функцией аргумента x.

Обозначим: $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ - сумма ряда,

$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ - частичная сумма функционального ряда

$r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ - остаток функционального ряда

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x) \quad (1)$$

Пусть функциональный ряд сходится в некоторой области $\to \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$,

.

Вычислим предел левой и правой части (1).

$\lim\limits_{n\to\infty} S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) + \lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) \qquad S(x) = S_n(x) + \lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$

Вывод: В области сходимости функционального ряда предел его остатка равен нулю.

Мажорируемый ряд.

Определение: Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется мажорируемый в некоторой области *D*, если для него можно подобрать числовой знакоположительный сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (мажорант), такой, что для этих рядов выполняется следующее условие $|f_n(x)| \le a_n (\forall n \in N, \forall x \in D)$.

Например: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{n^2}$ (2)

Составим ряд из модуля $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos \pi x|}{n^2}$ (3)

Подберём мажорант: $\frac{|\cos \pi x|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} -$ сходящийся

<u>По признаку сравнения сходится (3) ряд. По достаточному признаку абсолютной сходимости сходится абсолютно второй ряд.</u>

<u>Вывод: Всякий мажорируемый в некоторой области функциональный ряд является абсолютно сходящимся в этой области.</u>

Свойства функциональных рядов

1-е свойство: равномерная сходимость.

Теорема: Если функциональный ряд является мажорируемым на $[a;b]$, то $\forall \varepsilon_n > 0 \; \exists \, M > 0$, такое, что $\forall n > M$ выполняется следующее неравенство: $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon_n$

Доказательство:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (1) - мажорируемый $\rightarrow S(x) = S_n(x) + r_n(x) \rightarrow S(x) - S_n(x) = r_n(x) \rightarrow$
$\rightarrow |S(x) - S_n(x)| = |r_n(x)|$ (2).; $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ (3) .

Для ряда (1) известен мажорант: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (4) $\rightarrow$ остаточный член ряда. $\varepsilon_k = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ (5) ; $\varepsilon_k \rightarrow 0$ т.к. (4) ряд сходится; $\varepsilon_k > 0$ т.к. (4) ряд – знакоположительный.
(1) и (4) ряды связаны по определению мажорируемости следующим неравенством:

$$|f_n(x)| < a_n \quad (6) \quad \forall n \in N.$$

Составим соотношение (6) для $n+1, n+2, \infty$ членов ряда:

$$\begin{cases} |f_{n+1}(x)| < a_{n+1} \\ |f_{n+2}(x)| < a_{n+2} \rightarrow \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| < \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = \varepsilon_k \; (\textit{из}\,(5)) \rightarrow \varepsilon_n > \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| > \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| = |r_k(x)|; \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

$$|r_k(x)| < \varepsilon_k \quad (7).$$

Подставляем (7) в (2): $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon_n$, ч.т.д.

Определение: Функциональный ряд, для которого справедлива доказанная теорема, называется равномерно сходящимся.

Второе свойство: непрерывность суммы.

Сумма мажорируемого на $[a, в]$ функционального ряда, составленного из непрерывных функций является непрерывной функцией.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Если $f_n(x) -$ непрерывная функция $\rightarrow S(x) -$ непрерывная.

3-е свойство: интегрирование суммы функционального ряда.

Интеграл от суммы мажорируемого на отрезке $[a,b]$ функционального ряда равен сумме интегралов вычисленных от каждого члена этого ряда.

Доказательство:

$$\int_{\alpha}^{x} S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{x} f_n(t)\,dt \quad (1), \quad \alpha, x \in [a,b]$$

Требуется доказать, что ряд, составленный из интегралов, стоящий в правой части (1), сходится.

$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \to S(t) = S_n(t) + r_n(t) \quad (2)$. Интегрируем левую и правую часть формулы (2):

$$\underbrace{\int_{\alpha}^{x} S(t)dt}_{S^*(x)} = \underbrace{\int_{\alpha}^{x} S_n(t)dt}_{S_n{}^*(x)} + \underbrace{\int_{\alpha}^{x} r_n(t)dt}_{r_n{}^*(x)}$$

$S^*(x)$- сумма ряда составленного из интеграла.

$S_b{}^*(x)$- частная сумма этого интеграла.

$r_n{}^*(x)$- остаток этого ряда.

$$\left|r_n{}^*(x)\right| = \left|\int_{\alpha}^{x} r_n(t)\,dt\right| \le \pm\int_{\alpha}^{x}\left|r_n(t)\right|dt \to \left|r^*(x)\right| < \pm\varepsilon_n\int_{\alpha}^{x} dt = \pm\varepsilon_n t\,\Big|_{\alpha}^{x} = \pm\varepsilon_n(x-\alpha), \quad \begin{matrix} +\text{если } x > \alpha \\ -\text{если } x < \alpha \end{matrix}.$$

Из первого свойства известно: $\left|r_n(t)\right| < \varepsilon_n$

$x - \alpha < b - a \to \left|r_n{}^*(x)\right| < \varepsilon_n(b-a) \to \left|r_n{}^*(x)\right| \to 0, \text{т.к.} \quad \varepsilon_n \to 0$.

Остаток ряда, составленный из интеграла, *стремиться к* $0 \to$ этот ряд сходится, значит, формула верна.

Пример:

$$\int_{0}^{\pi/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos nt}{n^2}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n^2\cdot n}\Bigg|_{0}^{\pi/2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n^3} = 1 - \frac{1}{27} - \frac{1}{125} - \frac{1}{343} - \frac{1}{729} - \underbrace{\frac{1}{1331}}_{<\varepsilon} = 0{,}969$$

$\varepsilon = 0.001 - \textit{точность.}$

Четвёртое свойство: дифференцирование сумма ряда.

Производная от суммы мажорируемого на $[a,в]$ функционального ряда равна сумме производных вычисленных от каждого члена этого ряда

Доказательство:

$$S'(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t) \quad (1); \qquad S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x\in[a,в] \ (2)$$

Зададим: $x=\alpha\in[a,в]-\mathrm{const}\to S(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha)$ (3), $\forall\alpha\in[a,в]$

Используем третье свойство, интегрируем левую и правую часть формулы (1):

$$\int_{\alpha}^{x} S'(t)dt=\int_{t}^{x}\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{x} f_n'(t)dt; \qquad dS(t)=S'(t)dt; \ \ df_n(t)=f_n'(t)dt\to$$

$$\int_{\alpha}^{x} dS(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{x} df_n(t)\to S(t)\Big|_{\alpha}^{x}=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\Big|_{\alpha}^{x}\to \qquad S(x)-S(\alpha)=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}_{формула(1)}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha)}_{формула(3)}\to$$

$$\to S(x)-S(\alpha)\equiv S(x)-S(\alpha)$$

Получили тождество, значит формула (1) верна.

Понятие степенного ряда, признак его сходимости. Теорема Абеля.

Определение: Степенным называется такой функциональный ряд, у которого каждый его член является степенной функцией.

Виды записи степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (a_n, x_0 - const);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Теорема Абеля.

Если степенной ряд сходится в точке, $|x| = |x_0|$, то этот ряд сходится в интервале $|x| < |x_0|$.

Если степенной ряд расходится в точке, $|x| = |x^*|$, то он расходится в интервале $|x| > |x^*|$.

Доказательство:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (1) составим из 1-го ряда, ряд из модулей.

$\sum_{n-0}^{\infty} |a_n x^a|$ (2) получим из 2-го ряда сходящийся знакоположительный числовой ряд.

Подставим в (2) $x = x_0$: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0{}^n|$ (3)- сходится по условию теоремы.

Используем необходимый признак сходимости для 3-го ряда.

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n x_0{}^n| = 0 \to$ используем определение предела $|a_n x_0{}^n - 0| < \varepsilon (\varepsilon > 0) \to |a_n x_0{}^n| < \varepsilon$ (4).

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x^n \frac{x_0{}^n}{x_0{}^k} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|a_n x_0{}^n|}_{<\varepsilon \text{ из } (4)} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \qquad (5)..$$

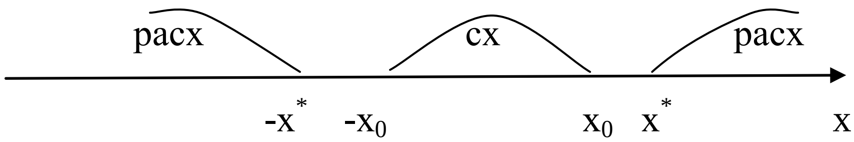
Сравним полученный ряд с Р.Г.П. : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \to a_1 = \varepsilon$; $q = \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$.

Р.Г.П. сходится, если $|q| < 1 \to \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1 \to |x| < |x_0|$

5-й ряд сходится при $|x| < |x_0|$. 2-й ряд меньше 5-го, значит, по признаку сравнения 2-й ряд сходится при $|x| < |x_0|$.

По достаточному признаку абсолютной сходимости, если ряд из модулей (2) сходится, то сходится исходный ряд (1) при $|x| < |x_0|$.

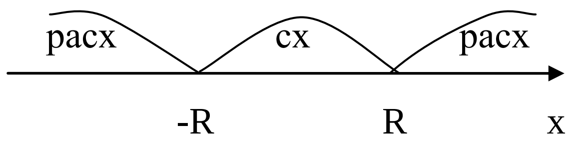
Пусть $|x| = |x^*|$ - ряд расходится. Используем метод от противного, т.е. предполагаем, что при $|x| = |x^*|$ - ряд сходится, $\to |x^*| < |x| - сх. \to |x^*| = |x| - \textit{сходится.}$ Получим противоречие условию, $|x| = |x^*|$ значит ряд расходится при $|x| > |x^*|$.



Радиус сходимости степенного ряда.

Определение: Радиусом сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется точка $x = R$ (R>0), отделяющая интервалы сходимости и расходимости.
Из теоремы Абеля $x_0 = R$, $x^* = R$

Когда точки совпадают, получаются два интервала $\to |x| < R \to -R < x < R$ - область абсолютной сходимости..



Вычисление радиуса сходимости по формуле Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| < 1 - \text{ряд сходится} \to |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \to |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;\ |x| < R \to$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} \quad (1)$$

Вычисление радиуса сходимости по формуле Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1 - \text{ ряд сходится} \qquad |x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1 \to |x| < \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \to$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \quad (2)$$

Замечание: Формула (1,2) применяется, если в степенном ряде в степени n располагается подряд, т.е. n = 1,2,3… В противном случае для каждой конкретной задачи необходимо выводить свою формулу радиуса сходимости.

Пример: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}n^2}{(n+1)^2 x^{2n}}\right| < 1 \to x^2 \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}}_{1} < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \to |x| < 1 \to \ \to R = 1 \Rightarrow x \in (-1;1)$$

Исследуем поведение ряда на границах интервала сходимости.

$x = \pm 1 \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{2n}}{n^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – ряд Дирихле – сходится.

Ответ: $x = [-1;1]$ – область абсолютной сходимости.

Свойства сходящихся степенных рядов.

1. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией.

Это является следствием 2-го свойства функциональных рядов, т.к. степенной ряд составлен из непрерывных степенных функций.

2. Степенной ряд можно неограниченное число раз дифференцировать и интегрировать.

Это является следствием 3 и 4 свойств функционального ряда т.к. производная и интеграл от степенной функции остаётся степенной функцией.

3. В степенном ряде можно вычитать или прибавлять конечное число слагаемых.

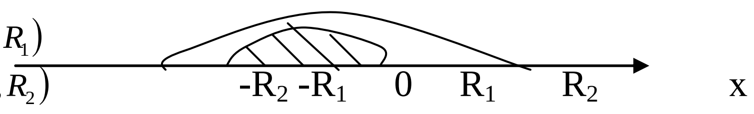
Это является следствием 1-го свойства числовых рядов.

Замечание: 1-3 свойства справедливы в области сходимости степенного ряда.

4. Сумма и произведение 2-х степенных рядов является сходящимся степенным рядом на пересечении областей сходимости 2-х степенных рядов.

1 ряд $x \in (-R_1, R_1)$

2 ряд $x \in (-R_2, R_2)$



$x \in (-R_1, R_1)$ - область сходимости суммы или произведения.

Разложение функции в степенной ряд: необходимое условие и вид разложения.

Определение: Разложением функции в степенной ряд называется представление этой функции в виде ряда.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad f(x)=S(x) \ (1)$$

Необходимое условие.

Теорема: Если функция разложима в степенной ряд, то она бесконечное число раз дифференцируема.

Это является вторым следствием степенных ряда, так как выполняется равенство (1).

Вид разложения.

Теорема: Если функция разложима в степенной ряд $\forall x\in 0_\delta\left(x_0\right)$, то это разложение имеет следующий вид:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Доказательство:

$$S(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

$$x=x_0\to f(x_0)=S(x_0)=a_0\to a_0=f(x_0)$$

$$f'(x)=S'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots \qquad \to f'(x_0)=a_1$$

$$f''(x)=S''(x)+2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)(x-x_0)^{n-2}a_n+\ldots$$

$$\to f''(x_0)=2!a_2 \qquad \to a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$f'''(x)=S'''(x)=2\cdot 3a_3+\ldots+n(n-1)(n-2)(x-x_0)^{n-2}a_n+\ldots$$

$$\to f'''(x_0)=3!a_3 \qquad \to a_3=\frac{f'''(x_0)}{3!}$$

....

$$f^{(n)}(x)=S^{(n)}(x)=n!a_n\ldots \qquad \to f^{(n)}(x_0)=n!a_n\to \qquad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Достаточные признаки разложения функции в ряд Тейлора.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (2)-\text{ряд Тейлора.}$$

Формула Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (3),\text{ где} \quad \overline{x}\in[x_0,x]$$

В формуле (3) первые n - слагаемых соответствуют частичной сумме ряда (2).

$$\to f(x)=S_n(x)+R_n(x) \ (5).$$

Признак 1. Если функция бесконечное число раз дифференцируема и $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0 \ (4)$,

то функцию можно разложить в ряд Тейлора.

Доказательство:

Пусть ряд (2)-сходится, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$.

Вычислим предел левой и правой части формулы (5): $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)+\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)$.

$f(x)=S(x)\equiv(1)\to$функция разложима в степенной ряд.

Признак 2. Если функция бесконечное число раз дифференцируема, и все её производные в точке x_0 ограничены, т.е. $\left|f^{(n)}(x_0)\right|<M, (\forall M>0)$ то функция разложима в ряд Тейлора.

Доказательство:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \to\left|R_n(x)\right|=\frac{\left|f^{(n+1)}(\overline{x})\right|}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}.$$

$|x-x_0|<2R=\delta$, т.к. отрезок $|x-x_0|$ лежит внутри области сходимости от $-R$ до R

$$\to\left|R_n(x)\right|<\frac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}$ и докажем его сходимость, используя признак Даламбера.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\delta^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!\delta^{n+1}}=\delta\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0<1-$сходится, отсюда по необходимому признаку сходимости числового ряда предел общего члена равен 0. $\to\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|R_n(x)\right| < M\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \to$ условие (4) выполняется, значит, по 1-му признаку функция разложима в ряд Тейлора.

<u>Разложение функций вряд Маклорена.</u>

Замечание: Ряд Маклорена получается из ряда Тейлора, если принять в ряде Тейлора $x_0 = 0$.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

1. $f(x) = e^x$

$f(0) = 1$; $\quad f^{(n)}(x) = e^x$; $\quad f^{(n)}(0) = 1 \to$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$, с учётом, что: $0! = !$

Найдём область сходимости полученного ряда, используя признак Даламбера.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right| < 1 \to |x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} < 1 \to |x|\cdot 0 < 1 \to x \in (-\infty;\infty) -$ область сходимости

Пример: $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x}dx = \int_0^1 \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}{x}dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n!}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{x^n}{n}\Bigg|_0^1 =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} = 1.36 \qquad \varepsilon = 0.01$$

2. $f(x) = \sin x$

$f(0) = 0$ $\quad f'(x) = \cos x$; $\quad f'(0) = m$; $\quad f''(x) = -\sin x$; $\quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$; $f'''(0) = -1$; $\quad f''''(x) = \sin x$; $\quad f''''(0) = 0 \to$

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!}\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}(-1)^{n+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+1}\cdot(2n-1)!}{(2n+1)!\cdot x^{2n-1}}\right| < 1 \to x^2\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{2n(2n+1)}\right| < 1 \to x^2\cdot 0 < 1 \to x \in (-\infty;\infty) -$ область сходимости.

3. $f(x) = \cos x$

$f(0) = 1$; $f'(x) = -\sin x$; $f'(0) = 0$; $f''(x) = -\cos x$; $f''(0) = -1$

$f'''(x)\sin x$; $f'''(0) = 0$; $f''''(x) = \cos x$; $f''''(0) = 1 \to$

$f(x) = \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n} \cdot (-1)^n}{(2n)!}$, $x \in (-\infty;\infty)$ – область сходимости.

4. $f(x) = (1+x)^m$

$f(0) = 1$; $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$; $f'(0) = 0$

$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$; $f''(0) = m(m-1) \to$

$$f(x) = (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left[m(m-1)\cdot\ldots(m-(n-1))\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\left[m(m-1)\cdot\ldots(m-n)\right]}{x^n\left[m(m-1)\cdot\ldots(m-(n-1))\right]}\right| < 1 \Rightarrow |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right| < 1 \to \qquad |x|\cdot|-1| < 1 \to$$

$|x| < 1 \to x \in (-1;1)$ - область сходимости.

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде ряда Тейлора: $y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \ldots (1)$

С помощью степенных рядов можно интегрировать дифференциальные уравнения произвольного порядка.

$y'' = f(x, y, y')$ (2). н.у. $\begin{matrix} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \end{matrix}$.

Коэффициенты для первых 2-х слагаемых в решении (1) берутся из н.у.

$y''(x_0)$-получится, если подставить н.у. в исходное уравнение (2):

$y''(x_0) = f(x_0, y_0, y_{10}) = y_{20}$

Третья и т.д. производная будут найдены, если необходимое число раз продифференцировать дифференциальное уравнение (2) как сложную функцию и подставить в полученный результат н.у.:

$$y''' = f'_x(x, y, y') + f'_y(x, y, y') + f'_{y'}(x, y, y')y'' \to y'''(x_0) = f'_x(x_0, y_0, y_{10})y' +$$
$$+ f'_y(x_0, y_0, y_{10})y_{10} + f'_{y'}(x_0, y_0, y_{10})y_{20}$$

$$y'''(x_0) = y_{30}$$

$$y(x) = y_0 + y_{10}(x - x_0) + \frac{y_{20}}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y_{30}}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Пример: $y''' = x + 2y + y' - y''$. Н.у. $y(0) = 1$; $y(0) = 0$; $y''(0) = -1$;

$y'''(0) = 0 + 2 + 0 + 1 = 3$; $y'''' = 1 + 2y' + y'' - y''' \to y''''(0) = 1 - 1 - 3 = -3.$

$$y(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 - \frac{3x^4}{4!} + \ldots$$

Понятие ряда Фурье и определение его коэффициентов.

Определение: Функциональный ряд называется тригонометрическим, если общий член его содержит функцию cos или sin.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+в_n\sin nx\right] \quad (1)$$

Рассмотрим знакоположительный сходящийся числовой ряд

$$S=\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n|+|в_n|\right] \quad (2)$$

(2) ряд больше ряда составленного из абсолютных величин ряда (1), значит (1) является мажорируемым, его можно интегрировать.

Так как cos и sin периодические функции, то ряд (1) будем интегрировать на интервале от $-\pi$ до $+\pi$.

Для нахождения коэффициента a_0 проинтегрируем левую и правую часть формулы (1).

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+в_n\sin nx\right]dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+в_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right]=$$

$$=\frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n 2\int_0^{\pi}\cos nxdx+0\right]=a_0\pi+\sum_{n=1}^{\infty}2a_n\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}=a_0\pi$$

Замечание: Определённый интеграл на отрезке, симметричном относительно 0, от нечётной функции равен 0, от чётной функции равен двум интегралам на половине отрезка.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \quad (3)$$

Для нахождения коэффициента a_n, левую и правую часть (1) умножаем на $\cos kx$ $(k-const,\ k\in N)$ и интегрируем.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx}_{I_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx}_{I_1}+в_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos kxdx}\right] \quad (4)$$

$$I_0=2\int_0^{\pi}\cos kxdx=2\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi}=0$$

1 случай $(k=n)$. Используя формулу тригонометрии $2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos(\alpha)$, получим:

$$I_1=2\int_0^{\pi}\cos^2 nxdx=2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx=(x+\underbrace{\frac{\sin 2nx}{2n}}_{0})\Big|_0^{\pi}=\pi$$

2 случай $(k \neq n)$ Используя формулу тригонометрии
$2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$, получим:

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \times \cos nx dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = \int_{0}^{\pi} [\cos(x(k+n)) + \cos(x(k-n))] dx =$$

$$= \left[\frac{\sin(x(k+n))}{k+n} + \frac{\sin(x(k-n))}{k-n}\right]\Bigg|_0^{\pi} = \left[\frac{\sin(\pi(k+n))}{k+n} + \frac{\sin(\pi(k-n))}{k-n}\right] = 0$$

$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx dx = 0, (k=n)$,так как sin - нечётная.

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin nx \cos kx dx}_{\textit{нечётная}} = 0, (k \neq n)$$

В итоге имеем: $I_0 = 0$, $I_1 = \pi, (k=n)$, $I_1 = 0, (k \neq n)$, $I_2 = 0, (k=n)$, $I_2 = 0, (k \neq n)$
Подставляем значение интегралов $I_{0,} I_1, I_2$ в формулу (4):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_n \pi \text{ (когда } k = n) \quad \rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad (5)$$

Для нахождения коэффициента $в_n$ левую и правую часть формулы (1) умножаем на $\sin kx$ и интегрируем. В итоге аналогично a_n получим:

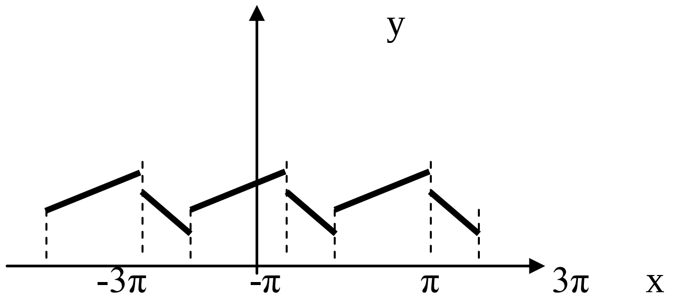
$$в_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (6)$$

Определение: Рядом Фурье называется тригонометрический ряд (1), если коэффициенты для него вычисляются по формулам (3,5,6).

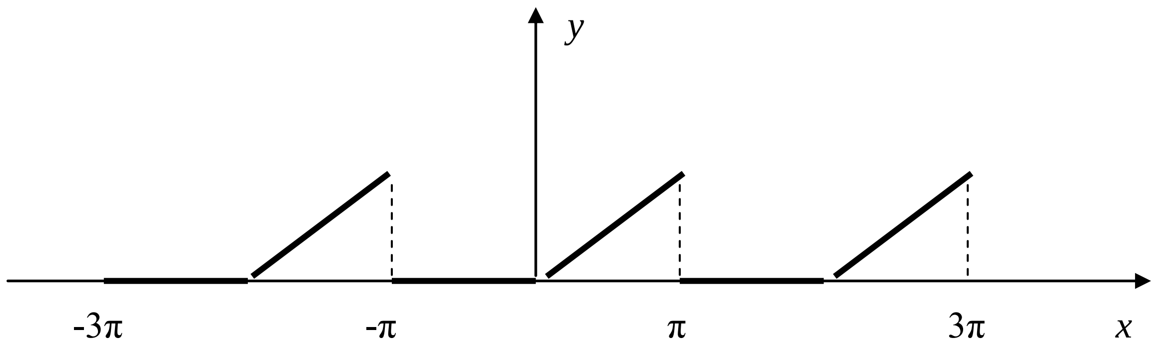
Необходимое условие разложения функции в ряд Фурье.

Если функция разложима в ряд Фурье, то она является периодической функцией.

Определение: Функция называется кусочно-монотонной, если она имеет точки разрыва 1-го рода.



Пример: $f\left(x\right)=\begin{cases} x, x\in\left[0,\pi\right] \\ 0, x\in\left[-\pi,0\right] \end{cases}$



$$a_0\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos\left(nx\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx$$

Интегрируем по частям: $u = x, du = dx; \quad dv = \cos nxdx, v = \dfrac{\sin nx}{n}$;

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin x\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin xdx\right) = \frac{1}{\pi n}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^\pi = \frac{1}{\pi n^2}\left(\cos \pi n - 1\right)$$

Анализируем два случая:

$n - \textit{нечётная} \rightarrow \cos \pi n = -1, n - \textit{четная} \rightarrow \cos \pi n = 1 \rightarrow \cos \pi n = (-1)^n$

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right];$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx. \left(\textit{по частям}: u = x; du = dx; \quad dv = \sin nxdx; k = \frac{-\cos nx}{n}\right).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nxdx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}(-1)^n - \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^\pi\right]$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right] = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$$

Ряд Фурье для чётных и нечётных функций.

1 случай: $f(x)-$ чётная $\to a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx$

$f(x)\cos nx-$ чётная $\to a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_o^{\pi} f(x)\cos nxdx$ $\qquad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$

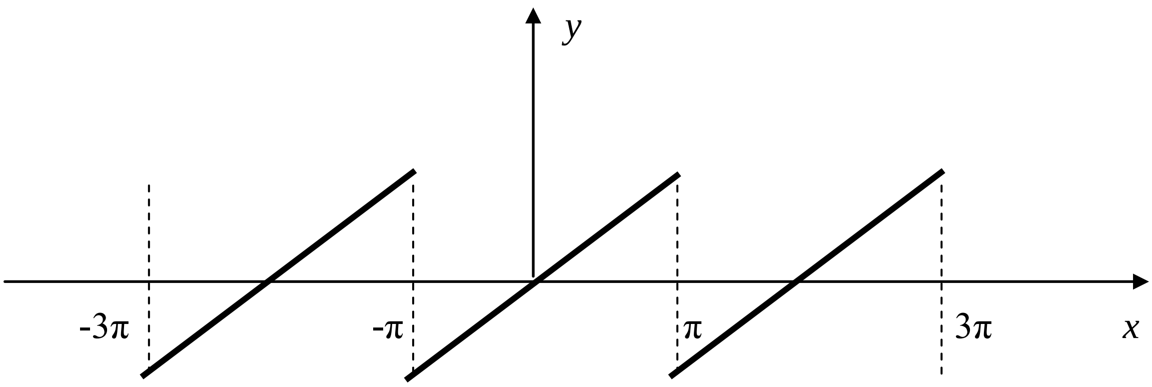
$f(x)\sin x-$ нечётная $\to в_n=0$

Замечание: Пример для этого случая приведен в следующем вопросе.

2 случай: $f(x)-$ нечётная $\to a_0=0$ $\qquad f(x)\cos nx-$ нечётная $\to a_n=0$

$f(x)=\sin nx-$ чётная $\to в_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nxdx$ $\qquad f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} в_n\sin nx$

Пример: $f(x)=x, \quad x\in[-\pi,\pi]$



И рисунка видно, что на основном интервале: $x\in[-\pi,\pi]$ график функции симметричен относительно начала координат, значит, исходная функция - нечётная $\to a_0=0\to a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cdot\sin nxdx.\ \left(по\ частям: u=x; du=dx;\quad dv=\sin nxdx; k=\frac{-\cos nx}{n}\right).$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\cos nxdx\right]=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}(-1)^n-\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$b_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n};$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\sin nx\right]=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$$

Ряд Фурье для функции с периодом $2L$, $т.е.$ $x \in [-L, L]$

Преобразуем исходную функцию $f(x)$ с помощью замены: $x = \frac{tL}{\pi}$ в функцию $f(t)$. Выразив из формулы замены: $t = \frac{\pi x}{L}$, найдём интервал для новой функции: $t_n = -\pi$; $t_b \frac{\pi L}{L} = \pi \to t \in [-\pi \pi]$. Полученная функция $f(t)$ имеет период 2π, значит, для неё справедливы формулы (1), (3), (5), (6):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt];$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{tl}{\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} f(x) \frac{\pi}{L} dx \to a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{tL}{\pi}\right) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \frac{\pi}{L} dx \to \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{\pi n x}{L} dx;$$

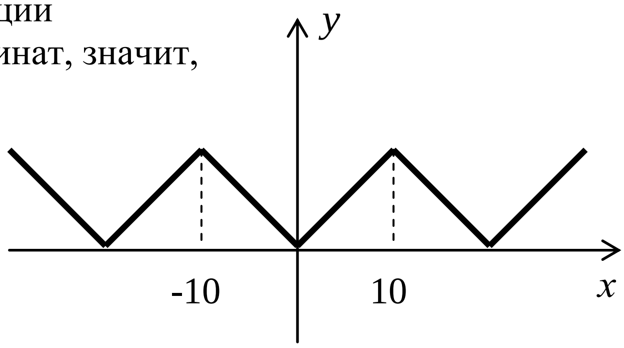
Аналогично: $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx$

Делаем обратную замену: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right]$

Пример: $f(x) = \begin{cases} -x, x \in [-10, 0] \\ x, x \in [0, 10] \end{cases}$; $L = 10$

Из рисунка видно, что график функции симметричен относительно оси ординат, значит, исходная функция - чётная $\to b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{10} \int_{0}^{-10} x dx = \frac{1}{5} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{10} = 10$$



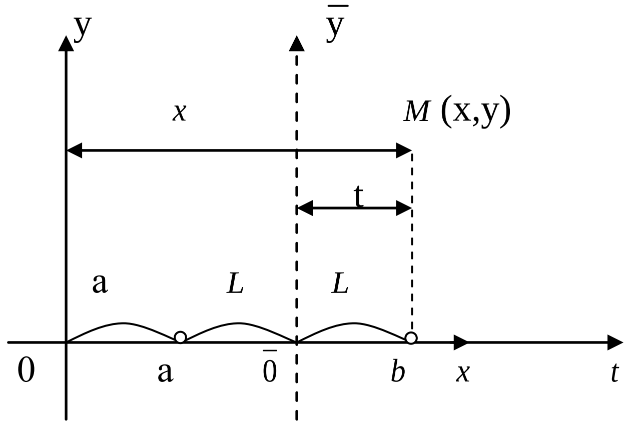
$$a_n = \frac{2}{10} \int_0^{10} x \cos \frac{\pi n x}{10} dx = \underbrace{\frac{1}{5} \left[\frac{10x}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{10} \right] \Big|_0^{10}}_{=0} - \frac{10}{\pi n} \int_0^{10} \sin \frac{\pi n x}{10} dx = \begin{pmatrix} \textit{по частям}: & u = x; du = dx \\ dv = \cos \frac{\pi n x}{10} dx; & v = \frac{10}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{10} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \left(-\cos \frac{10}{\pi n} \right) \Big|_0^{10} = \frac{20}{\pi^2 n^2} \left[(-1)^n - 1 \right];$$

$$f(x)=5+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{20}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos\frac{\pi n x}{10}=5+\frac{20}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos\frac{\pi n x}{10};$$

<u>Ряд Фурье для функции на произвольном отрезке</u>

$[a,b]$.



Переместим ось y в середину отрезка $[a,b]$. Тогда: $L=\dfrac{b-a}{2}$;

С помощью замены переменных $x=t+L+a$ получится функция с периодом $2L$, которую можно разложить в ряд Фурье по формулам предыдущего вопроса, заменяя в этих формулах x на t.

После разложения функции $f(t)$ в ряд Фурье осуществляется обратная замена и вместо t подставляется: $t=x-L-a$.

Пример: $f(x)=3x,\quad x\in[3,7]$

$$L=\frac{b-a}{2}=\frac{7-3}{2}=2;$$

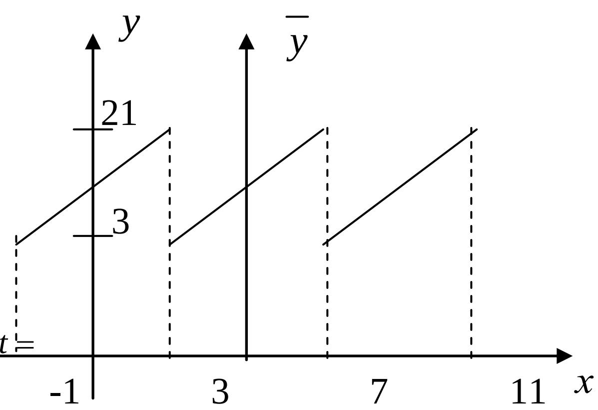
$x=t+a+L=t+3+2$

$\textit{Замена}: x=t+5$;

$\textit{Обратная замена}: t=x-5$

$$f(t)=3(t+5);\quad a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}3(t+5)\,dt=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2}+5t\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{3}{2}(2+10-2+10)=30;$$



$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{\pi nt}{L}dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 3(t+5)\cos\frac{\pi nt}{2}dt = \begin{pmatrix} \text{по частям}:\ u = t+5 \to du = dt \\ dv = \cos\frac{\pi nt}{2}dt \to v = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nt}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{3}{2}\left((t+5)\frac{2}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi nt}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} - \frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{2}\sin\frac{\pi nt}{2}dt\right) = \frac{3}{\pi n}\left(0 - \frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nt}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} = -\frac{6}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - (-1)^n\right] = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{\pi nt}{L}dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 3(t+5)\sin\frac{\pi nt}{2}dt = \begin{pmatrix} \text{по частям}:\ u = t+5 \to du = dt \\ dv = \sin\frac{\pi nt}{2}dt \to v = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nt}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{3}{2}\left((t+5)\frac{2}{\pi n}\left(-\cos\frac{\pi nt}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} + \frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{2}\cos\frac{\pi nt}{2}dt\right) = \frac{3}{\pi n}\left(-7(-1)^n + 3(-1)^n + \underbrace{\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nt}{2}}_{=0}\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{12}{\pi n}(-1)^{n+1}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{\pi n}{L} + b_n\sin\frac{\pi nt}{L}\right] = 15 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{12}{\pi n}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi nt}{2}\right];$$

$$f(x) = 15 + \frac{12}{\pi}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n(x-5)}{2}.$$