Дифференциальные уравнения

Общие сведения о дифференциальных уравнений Задача на составление дифференциальных уравнений

Определение: дифференциальным уравнением называется такое уравнение, которое составлено относительно неизвестной функции и производных от неё.

Определение: Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящие в это дифференциальное уравнение.

Определение: дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если оно составлено относительно неизвестной функции одного переменного.

$$f(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0 \qquad y = y(x)$$

Например; дифференциальное уравнение третьего порядка: $(y'')^5 + y''' = x$

Определение: дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных, если оно составлено относительно функции нескольких переменных.

$$F(x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ldots) = 0$$

Например: уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

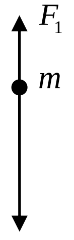
Определение: Решением дифференциального уравнением называется неизвестная функция, обращающая это уравнение в тождество.

Определение: Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Задача на составление дифференциального уравнения.

Дано: Материальная точка массой m брошена с некоторой высоты со скоростью V_0, в среде с коэффициентом сопротивления k.

Требуется составить дифференциальное уравнение движения материальной точки.



На материальную точку действуют: силы сопротивления среды $F_1 = mg$ и силы тяжести $F_2 = kV$. По третьему закону Ньютона: $F_1 - F_2 = ma$, где ускорение вычисляется через скорость: $a = V'$.

Тогда: $mg - kV = m\,V' \;:\; m$

$\rightarrow \quad V' + \dfrac{k}{m}V = g$ - дифференциальное уравнение движения материальной точки.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и теорема Коши для него.

Обыкновенное уравнение первого порядка имеют вид: $y' = f(x;y)$ (1)

т. Коши: Если в уравнении (1) функции f, f'_y являются непрерывными $\forall x \in D \in R$, то через каждую точку области D проходит единственное решение.

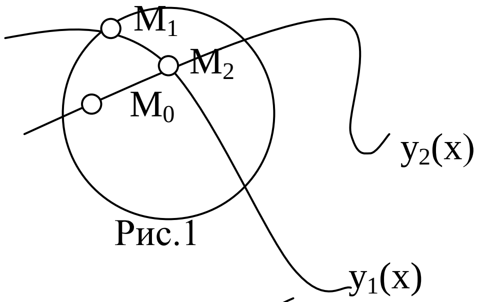


Рис.1

В точке M_2 (Рис.1) походят 2 решения, что противоречит т. Коши, значит решения уравнения (1) представляют собой непересекающиеся линии (Рис.2).

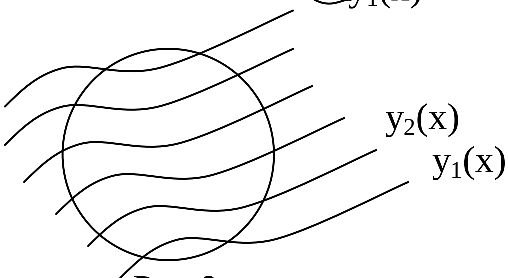


Рис.2

Т.к. область содержит бесчисленное множество точек, то уравнение (1) имеет бесчисленное множество решений.

Например: $y' = g$ - const; $\frac{dy}{dx} = g \to dy = gdx$; $\int dy = \int gdx$; $y = gx + c$.

Вывод: решение уравнения (1) отличаются друг от друга на величину произвольной постоянной C.

Определение: решение $y = y(x;c)$ непрерывно зависящее от аргумента x и произвольной постоянной c, определённой единственным образом для каждой точки области, называется общим решением уравнения (1).

Определение: условие прохождения решения через заданную точку области называется начальным условием (н.у.).

Замечание: Количество н.у. определяется порядком дифференциального уравнения.

Для дифференциального уравнения первого порядка н.у. имеет вид: $y(x_0) = y_0$

Определение: решение $y = y(x, c_0)$ удовлетворяющее н.у. называется частным решением.

Например: н.у. $y(0) = \vartheta_0$; $\vartheta_0 = g \cdot 0 + c \to c = \vartheta_0$; $y = \vartheta_0 + gx$.

Определение: Решение дифференциального уравнения представленное в виде неявной функции называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Например: $y^3 + sin(y) + e^y - x = 0$.

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Определение: дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, если правая часть его представлена в виде произведения двух функций, отдельно зависящих от x и y:

$$y' = f_1(x)f_2(y)$$

Замечание: если правая часть содержит только $f_1(x)$, или $f_2(y)$, или *const*, то это дифференциальное уравнение также будет являться частным случаем дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Порядок решения:

1. $y' = \frac{dy}{dx} \to \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$

2.Переносим всё, что касается y в левую, что x в правую часть:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

3.Интегрируем левую и правую части: $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$

Пример: $y' = 2\frac{y}{x}$

$$y' = 2y\frac{1}{x} \to \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \to \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}dx \to \quad \ln y = 2\ln x + c\,.$$

Замечание: Произвольную постоянную c можно представить через любое выражение или функцию с этой постоянной.

$$\ln y = \ln x^2 + \ln c \to \quad \ln y = \ln cx^2 \to \quad y = cx^2$$ - общее решение

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Определение: Функция $f(x,y)$ называется однородной, если для неё выполняется следующее условие $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$ $(\lambda \neq 0.1)$ n-порядок однородности функции.

Например: $f(x,y)=x^2+y^2$ $f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+(\lambda y^2)=\lambda^2(x^2+y^2)=\lambda^2 f(x,y)\to$ однородная функция второго порядка.

Определение: дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если правая часть этого уравнения представлена однородной функцией нулевого порядка:

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$$

Порядок решения:

1. $y'=f(x,y)=f(\lambda x,\lambda y)$

Замечание: Если дифференциальное уравнение содержит $\frac{y}{x}$, то это является признаком неоднородности.

2. $\lambda=\frac{1}{x}\to y'=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

3.Замена $u=u(x)=\frac{y}{x}\to$ $y=u\cdot x\to$ $y'=u'x+ux'\to$ $y'=u'x+u$

Замечание: $y=u(x)\cdot x-$ является формулой обратной замены.

4. $u'x+u=\varphi(u)\to u'=[\varphi(u)-u]\frac{1}{x}$

Замечание: Однородное дифференциальное уравнение первого порядка всегда приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

5. $\frac{du}{u}=\frac{\varphi(u)-u}{x}\to\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$

Пример: $y'=\frac{2y}{x}$

$u=\frac{y}{x}$; $y'=u'x+u\to u'x+u=2u\to u'=\frac{u}{x}\to\frac{du}{dx}=\frac{u}{x}$

$\int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x}\to\ln u=\ln x+\ln c\to u=cx\to y=ux=cx^2$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Определение: Дифференциальное уравнение называется линейным, если коэффициенты перед неизвестной функцией и её производной являются функциями одного переменного, а неизвестная функция и её производная входит в уравнение первой степени.

$$a_1(x)y' + a_2(x)y + a_3(x) = 0 \ \big|: a_1(x) \neq 0$$

Замечание: $a_1(x) \neq 0$ т.к. в противном случае мы получим не дифференциальное уравнение, а алгебраическое уравнение: $a_2(x)y + a_3(x) = 0$

$$y' + \frac{a_2(x)}{a_1(x)}y = -\frac{a_3(x)}{a_1(x)} \to y' + p(x)y = g(x) \qquad (1).$$

Вывод формулы решения

В уравнении (1) временно примем правую часть равную нулю:
$y' + p(x)y = 0 \to y' = -p(x)y \to$ дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \to \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \to \ln y = -\int p(x)dx + \ln c \to \frac{y}{c} = e^{-\int p(x)dx} \to y = c(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$\to y = c(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (2)$$

Замечание: Т.к. в уравнении (1) правая часть неравна нулю и является функцией от **x**, то в решении (2) c является функцией от **x**.

Для того чтобы удовлетворить решение (2) уравнению (1), найдём производную от этого решения: $y' = c(x)e^{-\int p(x)dx} + c(x)e^{-\int p(x)dx}(-\int p(x)dx) \to$

$$y = c'(x)e^{-\int p(x)dx} + c(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)). \qquad (3)$$

Подставляем (2) и (3) в (1):

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} + c(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x) + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x);\ c'(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x) \to$$

$\to c'(x) = g(x)e^{\int p(x)dx} \to$ дифференциальное уравнение разделяющимися переменными

$$\to \frac{dc}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx} \to \int dc = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx \to c(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c \qquad (4)$$

Подставляем (4) в (2): $y = (\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c)e^{-\int p(x)dx}$ (5)

Например: $\vartheta' + \frac{k}{m}\vartheta = g \quad k,n,g\text{-}const;\ \vartheta = (\int ge^{\int \frac{k}{m}dx}dx + c)e^{-\int \frac{k}{m}dx} = (g\int e^{\frac{k}{m}x}dx + c)e^{-\frac{k}{m}x} =$

$= g(e^{\frac{k}{m}x}\frac{m}{k} + c)e^{-\frac{k}{m}x};\ \vartheta = g\frac{m}{k} + ce^{-\frac{k}{m}x}$ - общее решение.

н.у. $\vartheta(0) = \vartheta_0;\ \vartheta_0 = \frac{gm}{k} + c \to c = \vartheta_0 - \frac{gm}{k} \to \ \vartheta = \frac{gm}{k} + (\vartheta_0 - \frac{gm}{k})e^{-\frac{k}{m}x}$ - частное решение.

<u>Дифференциальное уравнение Бернулли.</u>

Уравнение Бернулли имеет вид: $y' = P(x)y = g(x)y^n$ (6)

Замечание: уравнение Бернулли является нелинейным, так как в нём присутствует функция n - ой степени.

Частные случаи решения (6).

1. $n = 0 \to y' + P(x)y = g(x) \equiv (1)$ - линейное уравнение первого порядка
2. $n = 1 \to y' + P(x)y = g(x)y \to y' = y(g(x) - P(x))$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

3. $n \neq 0;1 \to$ Разделим обе части уравнения (6) на y^n

$$\to y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = g(x)$$

Замена $z = y^{1-n}$ (7)

$$\to z' = (1-n)y^{-n}y' \to y'y^{-n} = \frac{z'}{1-n} \to \frac{z'}{1-n} + P(x)z = g(x) \to z' + (1-n)P(x)z = (1-n)g(x) -$$

линейное дифференциальное уравнение первого порядка, для которого известно решение (5).

$$Z = \left[(1-n)\int g(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx + c\right]e^{-(1-n)\int P(x)dx} \tag{8}$$

После определения Z по формуле (8) осуществляется обратная замена по формуле (7).

Пример: $y' + \overset{P(x)}{x}\, y = \overset{g(x)}{x}\, y^3$

$$n = 3 \to Z = y^{-2}$$

$$Z = (-2\int xe^{-2\int xdx}dx + c)e^{2\int xdx} = (-2\int xe^{-x^2}dx + c)e^{x^2}$$

Замена: $t = -x^2 \to dt = -2xdx \to dx = \dfrac{dt}{-2x}$

$$Z = (-2\int xe^t\frac{dt}{-2x} + c)e^{x^2} = (\int e^t dt + c)e^{x^2} = (e^t + c)e^{x^2} = (e^{-x^2} + c)e^{x^2} \to Z = 1 + ce^{x^2} \to$$

$1 + ce^{x^2} = y^{-2} \to \quad y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + ce^{x^2}}}$ - общее решение.

«Общие сведения о дифференциальном уравнении 2-го порядка и теорема Коши для него»

Дифференциальное уравнение 2-го порядка имеют вид: $y''=f(x,y,y')$ (1)

т. Коши: Если в уравнении (1) функции $f, f'_y, f'_{y'}$ непрерывны $\forall xyy' \in V \in R^3$, то через каждую точку области V проходит единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее двум начальным условиям.

Замечание: Решением уравнения (1) будет являться бесконечное число поверхностей проходящих через каждую точку области V.

Определение: Общим решением уравнения (1) будет являться функция $y=y(x,c_1,c_2)$ непрерывно зависящая от аргумента x и двух произвольных постоянных определяемых единственным образом для любых н.у.

Определение: Частным решением уравнения (1) называется функция $y(x,c_{10},c_{20})$ удовлетворяющая двум н.у. $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y_{10}$

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

Первый случай: Признаком этого случая является отсутствие в явном виде в уравнении (1) переменной y, то есть дифференциальное уравнение имеет вид: $y'' = f(x, y')$.

Замена: $z(x) = y'$ (2)

$\rightarrow z' = y'' \qquad z' = f(x, z)$ (3)

Решая дифференциальное уравнение первого порядка (3), находим функцию $z = z(x, c_1)$. Подставляя $z = z(x, c_1)$ в дифференциальное уравнение первого порядка (2) и решая его, находим искомую функцию $y = y(x, c_1, c_2)$.

Пример: $y'' + \frac{y'}{x} = x$

$z' + \frac{z}{x} = x$ - линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

$P(x) = \frac{1}{x}$; $\qquad g(x) = x$

Используем формулу: $z = \left[\int g(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right] e^{-\int P(x)dx}$

$$z = [\int xe^{\int \frac{1}{x}dx} dx + C] e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \left[\int \underset{x}{xe^{\ln x}}\, dx + C \right] \underset{\frac{1}{x}}{e^{-\ln x}} = [\int x^2 dx + C] \frac{1}{x} = [\frac{x^3}{3} + C] \frac{1}{x}$$

$$z = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} \rightarrow$$

$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$ -дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} \rightarrow \int dy = \int (\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}) dx \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2 \text{ - общее решение.}$$

Второй случай: В этом случае уравнение (1) не содержит в явном виде переменной x, то есть имеет вид $y'' = f(y, y')$.

Замена: $z = z(y) = y'$ (4)

$$y'' = z'y' \to y'' = z'z \qquad z'z = f(y, z) \qquad (5)$$

Замечание: Если уравнение (5) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, то $z' = \dfrac{dz}{dy}$.

Решая дифференциальное уравнение (5), находим функцию $z = z(y, c_1)$. Подставляя $z = z(y, c_1)$ в дифференциальное уравнение (4) и решая его, находим $y = y(x, c_1, c_2)$.

Пример: $y'' = \dfrac{e^y}{3y'}$ н.у. $y(-3) = 0$; $y'(-3) = 1$

$$z'z = \frac{e^y}{3z} \to$$

$\to z' = \dfrac{e^y}{3z^2}$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{dy} = \frac{e^y}{3z^2} \to 3\int z^2 dz = \int e^y dy \to z^3 = e^y + C_1 \to z = \sqrt[3]{e^y + C_1}$$

$y' = \sqrt[3]{e^y + C_1}$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{e^y + C_1} \qquad \int \frac{dy}{\sqrt[3]{e^y + C_1}} = \int dx$$

Общего решения дифференциальное уравнение не имеет, т.к. интеграл левой части не имеет первообразный в элементарных функциях.

Из н.у. следует $1 = \sqrt[3]{e^0 + C_1} \to C_1 = 0$

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{e^y}} = x_1 + C_1 \to \int e^{-\frac{y}{3}} dy = x + C_2 \to -3e^{-\frac{y}{3}} = x + C_2 \to e^{-\frac{y}{3}} = \frac{x + C_2}{-3}$$

$-\dfrac{y}{3} = \ln\dfrac{x + C_2}{-3} \to y = -3\ln\dfrac{x = C_2}{-3}$ Из н.у. $0 = -3\ln\dfrac{-3 + C_2}{-3}$ $\quad 1 - \dfrac{C_2}{3} = 1$

$C_2 = 0 \qquad y = -3\ln(-\dfrac{x}{2}) \qquad \forall x \le 0$ - частное решение.

Понятие линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Определение: Дифференциальное уравнение 2-го порядка называются линейными, если коэффициенты перед функцией производными от неё являются функциями только аргумента *x,* и функция её производной входит в уравнение первой степени.

$$a_1(x)y''+a_2(x)y'+a_3(x)y+a_4(x)=0\,|:a_1(x)\neq 0$$

Замечание: $a_1(x)\neq 0$ т.к. в противном случае получится дифференциальное уравнение 1-го порядка: $a_2(x)y'+a_3(x)y+a_4(x)=0$

$$\to y''+\frac{a_2(x)}{a_1(x)}y'+\frac{a_3(x)}{a_1(x)}y=-\frac{a_4(x)}{a_1(x)}\to$$

$$\to y+p_1(x)y'+p_2(x)y=g(x). \qquad (1).$$

Определение: Линейное дифференциальное уравнение называется однородным, если правая часть в уравнении (1) равна нулю и неоднородным в противном случае.

Определение: Два частных решения в уравнении (1) называются линейно зависимыми, если их отношение равно константе и независимыми, если их отношение - функция.

Определение: Два частных линейно независимых решения образуют фундаментальную систему уравнения (1).

Определение: Определитель 2-го порядка составленный из 2-х частных решений и производных от них называется определителем Вронского.

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Свойства однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Первое свойство: сумма двух частных решений

$$y'' + P_1 y' + P_2 y = 0 \text{. (1)}$$

Свойство: Сумма двух частных решений уравнения (1) так же является решением этого уравнения.

Доказательство:

y_1, y_2 - частные решения уравнения (1).

Требуется доказать: что $y = y_1 + y_2$ (2) - частное решение уравнения (1)

Подставляем частное решение y_1, y_2 в уравнение (1)

$$+\begin{cases} y_1'' + P_1 y_1' + P_2 y_1 = 0 \\ y_2'' + P_1 y_2' + P_2 y_2 = 0 \end{cases}$$

$$(y_1 + y_2)'' + P_1 (y_1 + y_2)' + P_2 (y_1 + y_2) = 0$$

Каждая из скобок заменяется формулой (2)

$$y'' + P_1 y' + P_2 y = 0 \equiv (1) \rightarrow$$

решение (2) является частным решением уравнения (1).

Второе свойство: умножение решения на константу.

Свойство: Произведение частного решения на константу также является частным решением уравнения (1).

Доказательство:

y_1 - частное решение уравнения (1).

Требуется доказать: $y = c y_1$ (3) - частное решение (1).

Подставляем (3) в (1):

$c y_1'' + c p_1 y_1' + c p_2 y_1 = 0 \,|: c \rightarrow y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1 = 0 \equiv (1) \rightarrow (3)$ - частное решение уравнения (1).

Следствие 1 из 1-го и 2-го свойства:

Линейная комбинация 2-х частных решений уравнения (1) также является частным решением этого уравнения: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Третье свойство: формула Остроградского - Лиувилля.

Свойство: Пусть y_1, y_2 - частное решение уравнения (1).Подставляем y_1, y_2 в уравнение (1).

$$+\begin{cases} y_1'' + P_1 y_1' + P_2 y_1 = 0 & \Big| \ (-y_2) \\ y_2'' + P_1 y_2' + P_2 y_2 = 0 & \Big| \ (y_1) \end{cases}$$

$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + P_1(y_1 y_2' - y_2 y_1') + P_2(y_1 y_2 - y_2 y_1) = 0$.

Вычислим определитель Вронского

$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \to$ вторая скобка является определителем Вронского.

Вычислим производную от определителя Вронского

$w' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \to$ первая скобка является производной от определителя Вронского.

$w' + P_1 w = 0 \to w' = -P_1 w$- дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dw}{dx} = -P_1 w \to \int_{x_0}^{x} \frac{dw}{w} = -\int_{x_0}^{x} P_1 dx$$

($x_0 -$ const; $x_0, x \in D -$область решения дифференциального уравнения)

$$\ln w(x)\Big|_{x_0}^{x} = -\int_{x_0}^{x} P_1 dx \to \ln w(x) - \ln w(x_0) = -\int_{x_0}^{x} P_1 dx$$

$\ln \dfrac{w(x)}{w(x_0)} = -\displaystyle\int_{x_0}^{x} P_1 dx \to w(x) = w(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} P_1(x) dx}$ $-$формула Остроградского - Лиувилля.

Следствия из третьего свойства.

Следствие 2: Если определитель Вронского не равен нулю в одной какой-то точке области решения, то он не равен нулю и во всех точках этой области.

Следствие 3: Определитель Вронского равен нулю, если он составлен из линейно зависимых решений.

$$\frac{y_1}{y_2} = C \to y_1 = y_2 C \qquad w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cy_2 & y_2 \\ Cy_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

Следствие 4: Определитель Вронского не равен нулю, если он составлен из линейно независимых решений.

Четвертое свойство: Структура общего решения.

Свойство: Если y_1, y_2 - фундаментальная система решений уравнения (1), то $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ (4) является общим решением этого уравнения.

Доказательство:

Решение (4) является частным решением уравнения (1), что следует из следствия 1.
Для доказательства общности решения необходимо подтвердить, что c_1 и c_2 определяются единственным образом из 2-х производных н.у.: $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_{10}$

Удовлетворяем решение (4) начальным условиям: $\begin{cases} y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y\ (x_0) \\ y_{10} = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) \end{cases}$. (5)

Получим систему линейных алгебраических уравнений (5) относительно c_1, c_2, которую решаем методом Крамера: $\det A = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$

$W(x_0) \neq 0$ по 4-му следствию т.к. по условию y_1, y_2 - линейно независимые.

$W(x) \neq 0, \forall x \in D$, по 2-му следствию $\rightarrow$ система (5) имеет единственное решение $\rightarrow c_1, c_2$ определяются единственным образом для любых н.у. $\rightarrow$ решение (4) является общим решением уравнения (1).

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' + P_1 y' + P_2 y = 0 \qquad (1)$$

(P_1,P_2- *const*)

Решение уравнения (1) ищем в следующем виде: $y = e^{kx}$ (2)

где *k*- неизвестная константа.

Найдем производные: $y' = ke^{kx}$ (3) $y'' = k^2 e^{kx}$ (4)

Подставляем (2,3,4) в (1):

$$k^2 e^{kx} + P_1 k e^{kx} + P_2 e^{kx} = 0 \ \Big| : e^{kx} \rightarrow$$

$$k^2 + P_1 k + P_2 = 0 \text{ -}$$

характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (1).

Вычислим дискриминант: $D = P_1^2 - 4P_2$

Корни характеристического уравнения действительные, разные.

$$D > 0 \rightarrow k_{1,2} = \frac{-P_1 \pm \sqrt{D}}{2}$$

Подставляем $k_{1,2}$ в решение (2) получаем два частных решения:

$$y_1 = e^{k_1 x} \ ; \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

Покажем, что эти два решения линейно независимы

$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{x(k_1 - k_2)}$ - функция, так как $k_1 \neq k_2 \rightarrow$

$\rightarrow y_1, y_2$ - линейно независимые решения

$$\rightarrow y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \rightarrow y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Пример: $y'' - 7y' + 6y = 0$

$$k^2 - 7k + 6 = 0 \rightarrow \quad D = 49 - 24 > 0 \rightarrow \quad k_1 \frac{7+5}{2} = 6 \,; \quad k_2 = \frac{7-5}{2} = 1$$

$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x$ - общее решение.

Корни характеристического уравнения действительные, равные.

$$D = 0 \to k = -\frac{P_1}{2} \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (2) получим одно частное решение $y_1 = e^{kx}$. Второе частное решение будем искать в следующем виде: $y = u(x)e^{kx}$ (6)

$$y' = u'e^{kx} + uke^{kx} = e^{kx}(u' + uk) \qquad (7)$$

$$y'' = ke^{kx}(u' + uk) + e^{kx}(u'' + ku') =$$

$$= e^{kx}(u'' + 2ku' + uk^2) \qquad (8)$$

Подставляем (6,7,8) в уравнение (1) и сокращаем на e^{kx}.

$$u'' + 2ku' + uk^2 + P_1u' + P_1ku + P_2u = 0$$

$$u'' + u'(2k + P_1) + u(k^2 + P_1k + P_2) = 0$$

Вторая скобка равна нулю, так как она является левой частью характеристического уравнения. Подставим в первую скобку *k* из (5)

$u'' + u'(2(-\frac{P_1}{2}) + P_1) = 0 \to u'' = 0 \to u' = C_1$ - дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{du}{dx} = C_1 \to \int du = C_1 \int dx \to u = C_1x + C_2$$

Для получения частного решения зададим произвольные постоянные

$$C_1 = 1; C_2 = 0 \to u = x \qquad (9)$$

Подставляем (9) в (6) $\quad y_2 = xe^{kx}$.

Покажем, что эти решения линейно независимы:

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{kx}}{xe^{kx}} = \frac{1}{x}$ - функция $\to$ y_1,y_2 - линейно независимы

$$\to \ y = C_1y_1 + C_2y_2 \quad \to y = e^{kx}(C_1 + C_2x)$$

Пример: $y'' - 4y' + 4y = 0$ н.у. $y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

$k^2 - 4k + 4 = 0 \to (k-2)^2 = 0 \to k = 2 \to \qquad y = e^{2x}(C_1 + C_2x) \to$

$y' = 2e^{2k}(C_1 + C_2x) + e^{2x}C_2$ - общее решение.

Из н.у. $\to 1 = C_1 \to C_1 = 1 \quad 0 = 2C_1 + C_2 \to C_2 = -2 \to$

$y = e^{2x}(1 - 2x)$ - частное решение.

Корни характеристического уравнения комплексные.

$$D<0 \to k_{1,2}=\frac{-p_1 \pm \sqrt{|D|}i}{2},\ (i=\sqrt{-1});\quad \to k_{1,2}=-\frac{p_1}{2} \pm \frac{\sqrt{|D|}}{2} i\,.$$

Обозначим $\alpha=\frac{-p_1}{2}$ - действительная часть комплексного числа, $\beta=\frac{\sqrt{|D|}}{2}$ - мнимая часть этого числа.

$$\kappa_{1,2}=\alpha \pm \beta\, i. \tag{10}$$

Лемма: Если $y=u(x)+v(x)i$ (11) является решением уравнения (1), то действительная часть $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$ этого решения в отдельности также является решением уравнения (1).

Доказательство:

подставляем решение (11) в уравнение (1).

$u''+v''i+p_1u'+p_1v'i+p_2u+p_2vi=0$; $(u''+p_1u'+p_2u)+i(v''+p_1v'+p_2v)=0$.

Замечание: Комплексное число равно нулю, если одновременно равны нулю его действительные и мнимые части.

$\to u''+p_1u'+p_2u=0 \equiv (1)$ и $v''+p_1v'+p_2v=0 \equiv (1) \to u,v-$ решения уравнения (1).

Подставляем (10) в (2): $y=e^{(\alpha+\beta i)x}$. Используем формулу Эйлера:

$$e^{a+bi}=e^a(\cos b+i\sin b) \to y=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x) \to \begin{matrix} u=e^{\alpha x}\cos\beta x=y_1 \\ v=e^{\alpha x}\sin\beta x=y_2 \end{matrix};$$

Покажем, что эти решения являются линейно независимыми:

$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x}=ctg\beta x-функция \to y_1,y_2-$ линейно независимы $\to y=c_1y_1+c_2y_2 \to$

$\to y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

Пример: $y''-4y'+13y=0$

$k^2-4k+13=0$

$$\sqrt{D}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}=\sqrt{4-13}=\sqrt{-9}=3i \to k_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{D}}{9}=2\pm 3i \to \alpha=2;\beta=3$$

$y=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$. - общее решение.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка: теорема о структуре общего решения.

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = g(x) \qquad (1)$$

Теорема: Если $\bar{y}$ является общим решением соответствующего однородного уравнения, а y^* - частное решение неоднородного уравнения, то их сумма является общим решением уравнения (1), то есть $y = \bar{y} + y^*$. (2)

Доказательство:

1. Докажем, что (2) является решением уравнения (1).
Для этого подставим (2) в (1).

$$\bar{y}'' + y^{*\prime\prime} + P_1\bar{y}' + P_1 y^{*\prime} + P_2\bar{y} + P_2 y^* = g(x)$$

$$(\bar{y}'' + P_1\bar{y}' + P_2\bar{y}) + (y^{*\prime} + P_1 y^{*\prime} + P_2 y^*) = g(x)$$

Первая скобка равна нулю, так как $\bar{y}$ является общим решением однородного уравнения с нулевой правой частью.

Вторая скобка равна $g(x)$,так как y^* является частным решением неоднородного уравнения

$\rightarrow g(x) \equiv g(x) \rightarrow$ решение (2) - является частным решением уравнения (1)

2. Докажем общность решения: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$ (3)

Для того чтобы доказать, что решение (3) является общим необходимо подтвердить, что произвольные постоянные C_1,C_2 определяются единственным образом для любых начальных условий:

н.у. $y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_{10}$

Из н.у. следует:

$y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y^*(x_0)$ и $y_{10} = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + y^{*\prime}(x_0)$

$$\longrightarrow \begin{cases} y_1(x_0)C_1 + y_2(x_0)C_2 = y_0 - y^*(x_0) \\ y_1'(x_0)C_1 + y_2'(x_0)C_2 = y_{10} - y^{*\prime}(x_0) \end{cases} \qquad (4)$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений методом Кремера:

$$\det A = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = w(x_0)$$

$w(x_0) \neq 0$ по 4 следствию, так как y_1, y_2 – линейно независимые $w(x) \neq 0$, $\forall x \in D$ по 2 следствию $\rightarrow \det A \neq 0 \rightarrow$ система (4) имеет единственное решение $\rightarrow C_1, C_2$ определяются единственным образом для любых н.у. $\rightarrow$ решение (3) является общим решением уравнения (1).

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$y''+p_1y'+p_2y=g(x) \qquad (1),$$

где $p_1 p_2 - const$.

Случаи нахождения частного решения $y*$.

1-й случай: Если правая часть имеет вид: $g(x)=A_n(x)e^{\gamma x}$,

то частное решение ищет в виде: $y*=x^r B_n(x)e^{\gamma x}$

$A_n(x)-$ известный многочлен n-ой степени; $\gamma-$ известная константа;

$B_n(x)-$ многочлен n-ой степени с неизвестными коэффициентами.

Например:

$A_n(x)=x^2-5 \to B_n(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$

$A_n(x)=11 \to B_n(x)=b_0$

$A_n(x)=1 \to B_n(x)=b_0$

$$r=\begin{cases}0, если & \gamma \neq k_1 \neq k_2\\ 1, если & \gamma = k_1; \gamma = k_2\\ 2, если & \gamma = k = k_1 = k_2\end{cases}$$

Замечание: Для нахождения неизвестных коэффициентов $b_0, b_1, b_2 ...$ необходимо подставить $y*$ в исходное уравнение (1) и приравнять коэффициенты перед одинаковыми степенями x в полученной левой и правой части.

Замечание: При этом должны сократиться все степени $x > n$.

Пример: $y''-2y'+y=e^x$

Общее решение однородного уравнения:

$y''-2y'+y=0 \to k^2-2k+1=0 \to (k-1)^2=0 \to k=1.$

$\overline{y}=e^{kx}(c_1+c_2x) \to \overline{y}=e^x(c_1+c_2x)$

Частное решение неоднородного уравнения:

$n=0 \to B_0(x)=b_0; \quad \gamma=1 \to \gamma=k \to r=2; \quad y*=x^2b_0e^x;$

$y*'=b_0(2xe^x+x^2e^x)=b_0e^x(2x+x^2);$

$y*''=b_0(e^x(2x+x^2)+e^x(2+2x))=b_0e^x(x^2+4x+2).$

Замечание: При подстановке $y*$ в исходное уравнение, e всегда сокращается.

$b_0(x^2+4x+2-4x-2x^2+x^2)=1 \to 2b_0=1 \to b_0=\dfrac{1}{2}; y*=\dfrac{x^2e^x}{2} \to$

$y=\overline{y}+y* \to y=e^x(c_1+c_2x+\dfrac{x^2}{2})$

2-ой случай: Если правая часть имеет вид: $g(x)=e^{\gamma x}(A_n(x)\cos\delta x+B_m(x)\sin\delta x,)$,
то частное решение ищет в виде: $y^*=x^r e^{\gamma x}(C_l(x)\cos\delta x+D_l(x)\sin\delta x)$.
$A_n(x)$, $B_m(x)$ – известные многочлены степеней $m,n.$ γ,δ – известные константы.
$C_l(x), D_l(x)$ – многочлены с неизвестными коэффициентами в степени $l=\max\{n,m\}$

Замечание: Если $g(x)$ не содержит $e^{\gamma x}$, то $\gamma=0$.
Замечание: Если $g(x)$ не содержит Cos или Sin, то y^* обязательно содержит и Cos, и Sin.

$$r=\begin{cases}0, если & \gamma+\delta i\neq\alpha+\beta i\\ 1, если & \gamma+\delta i=\alpha+\beta i.\end{cases}$$

где α,β - действительная и мнимая части комплексных корней характеристического уравнения.
Замечание: Если корни характеристического уравнения действительные, то в этом случае $r=0$.

Для нахождения неизвестных коэффициентов $c_0,c_1,...;d_0,d_1,...,$ решение y^* подставляется в исходное уравнение (1) и приравниваются коэффициенты перед Cos и Sin левой и правой части.

Пример: $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x$; н.у. $y(0)=1; y'(0)=2.$

Общее решение однородного уравнения:
$k^2+k-2=0\to D=1+8=9>0\to k_1=1, k_2=-2.$
$\overline{y}=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}\to\overline{y}=c_1e^x+c_2e^{-2x}$.

Частное решение неоднородного уравнения:
$\gamma=0;\ \delta=1\to r=0$; $n=m=0\to C_0(x)=c_0,\ D_0(x)=d_0.$

$$y^*=c_0\cos x+d_0\sin x\to y^{*\prime}=-c_0\sin x+d_0\cos x\to y^{*\prime\prime}=-c_0\cos x-d_0\sin x.$$

$c_0\cos x-d_0\sin x-c_0\sin x+d_0\cos x-2c_0\cos x-2d_0\sin x=\cos x-3\sin x$;

$$\begin{cases}-c_0+d_0-2c_0=1\\ -d_0-c_0-2d_0=-3\end{cases};\quad \begin{cases}d_0-3c_0=1\\ 3d_0+c_0=3\end{cases}\Big|3$$

$$10d_0=10\to d_0=1\to c_0=0.$$

$y^*=\sin x\to$ $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+\sin x;$ $y'=c_1e^x-2c_2e^{-2x}+\cos x.$

Из н.у. $\to\begin{cases}1=c_1+c_2\\ 2=c_1-2c_2+1\end{cases}\to\begin{cases}c_1+c_2=1\\ c_1-2c_2=1\end{cases}\to 3c_2=0, c_2=0\to c_1=1.\to y=e^x+\sin x.$

Замечание: Если правая часть представлена суммой, то решается неоднородное дифференциальное уравнение для каждого слагаемого в отдельности, находятся соответствующие частные решения, а полученные результаты складываются.

Понятие системы и нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Определение: Системой дифференциальных уравнений называется такая система, которая содержит неизвестные функции $y_1, y_2 \dots y_n$ и производные до n порядка включительно от них.

$$\begin{cases} F_1(x_1 y_1,\dots y_n y_1' \dots y_n', \dots y_1^{(n)} \dots, y_n^{(n)}) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1 y_1,\dots y_n y_1' \dots y_n', \dots y_1^{(n)} \dots, y_n^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

Определение: Системой дифференциальных уравнений первого порядка называется системой, если она содержит неизвестные функции и первые производные от них.

$$\begin{cases} F_1(x_1 y_1,\dots y_n y_1' \dots y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1 y_1,\dots y_n y_1' \dots y_n') = 0 \end{cases}$$

Определение: Нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка в левых частях, которых стоят последовательно первые производные от каждой функции в отдельности, а правые части этих производных не содержит.

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x_1 y_1,\dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x_1 y_1,\dots, y_n) \end{cases}$$

Определение: Общим решением систем называются функции $y_1, y_2 \dots y_n$, зависящие от аргумента x и n произвольных $C_1 C_2 \dots C_n$.

Определение: Частным решением систем называется решение удовлетворяющие n н.у.

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Решение нормальной системы линейного дифференциального уравнения 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом подстановки.

$$y_1' = x + y_1 + y_2 \ (1); \qquad н.у.: \ y_1(0) = 1,$$
$$y_2' = 2x - 4y_1 - 3y_2 \ (2); \qquad y_2(0) = 0.$$

Решение:

Дифференцируем левую и правую часть уравнения (1).

$$y_1'' = 1 - y_1' + y_2' \quad (3)$$

Подставляем y_1', y_2' из (1) и (2) в (3):

$$y_1'' = 1 + x + y_1 + y_2 + 2x - 4y_1 - 3y_2 \to y_1'' = 1 + 3x - 3y_1 - 2y_2 \quad (4).$$

Выразим y_2 из 1-го уравнения: $y_2 = y_1' - y_1 - x \quad (5).$

Подставляем (5) в (4): $y_1'' = 1 + 3x - 3y_1 - 2y_1' + 2y_1 + 2x \to y_1'' + 5x - y_1 - 2y_1'.$

Переносим в левую часть всё, что касается y_1: $y_1'' + y_1' + y_1 = 5x + 1 \quad (6).$

Уравнение (6) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка.

Составляем характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 1 = 0 \to (k+1)^2 = 0 \to k = -1$;

Общее решение однородного уравнения: $\overline{y}_1 = e^{-x}(c_1 + c_2 x) \quad (7)$

$$\gamma = 0, \gamma \neq k \to r = 0; \qquad n = 1 \to B_1(x) = b_1 x + b_0;$$
$$y_1^* = b_1 x + b_0 \ (8); \quad y_1^{*\prime} = b_1 \ (9); \quad y_1^{*\prime\prime} = 0 \ (10).$$

Подставляем (8), (9), (10) в (6) $\to 2b_1 + b_1 x + b_0 = 5x + 1$ $\left| \begin{cases} b_1 = 5 \\ 2b_1 + b_0 = 1 \to b_0 = -9 \end{cases} \right.$.

Подставляем b_0, b_1 в (8) $y_1^* = 5x - 9 \quad (11).$

$$(7) + (11) \to y_1 = e^{-x}(c_1 + c_2 x) + 5x - 9 \quad (12).$$
$$y_1' = -e^{-x}(c_1 + c_2 x) + e^{-x} c_2 + 5 \to y_1' = e^{-x}(-c_1 - c_2 x + c_2) + 5 \quad (13).$$

Подставляем (12), (13) в (5)

$$y_2 = e^{-x}(-c_1 - c_2 x + c_2) + 5 - e^{-x}(c_1 + c_2 x) - 5x + 9 \to$$
$$y_2 = e^{-x}(-2c_1 - 2c_2 x + c_2) - 6x + 14 \quad (14).$$

Из н.у. $\begin{aligned} &\to 1 = c_1 - 9 \to c_1 = 10 \\ &0 = -2c_1 + c_2 + 14 \to c_2 = 6 \end{aligned}$

Подставляем c_1, c_2 в (12) и (14):

$$y_1 = e^{-x}(10 + 6x) + 5x - 9$$
$$y_2 = e^{-x}(-14 - 12x) - 6x + 14$$