Комплексные числа: виды, свойства, изображение и формы записи.

Определение: Комплексным числом называется выражение: $z = a + ib$ (1) (основная форма записи комплексного числа), где $a, b \in R$, i – мнимая единица ($i^2 = -1$).

Виды комплексных чисел

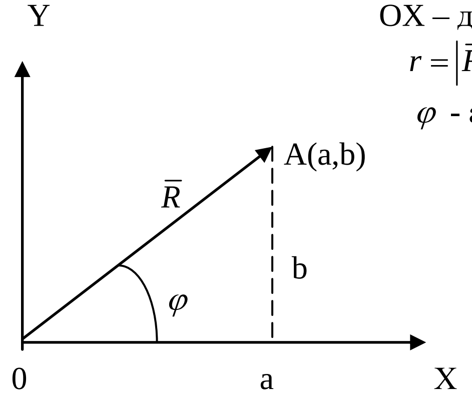
1. Мнимое число: $z = ib$; 2. Сопряженное число: $\overline{z} = a - ib$;

Свойства комплексных чисел

1. Два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части: $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2; b_1 = b_2$;
2. Комплексное число равно нулю, если одновременно равны нулю его действительная и мнимая части: $z = 0$, если $a = b = 0$.

Изображение комплексных чисел

Комплексное число изображается в комплексной области XOY в виде т. $A(a, b)$ или вектора $\overline{R}(a, b)$



OX – действительная ось, OY – мнимая ось.

$r = |\overline{R}|$ - модуль комплексного числа,

φ - аргумент комплексного числа.

Из прямоугольного треугольника с гипотенузой r и углом φ выразим a, b:

$a = r\cos\varphi; b = r\sin\varphi;$ (2). Подставим (2) в (1)

$\rightarrow z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - тригонометрическая форма записи комплексного числа

Алгебраические действие с комплексными числами

$$z_1 = a_1 + ib_1; z_2 = a_2 + ib_2; \qquad (3)$$

1. Сложение (алгебраическая сумма)

$z_1 \pm z_2 = a_1 + ib_1 \pm a_2 + ib_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2);$

Комплексные числа изображаются, как вектора, значит

Вывод: Сложение комплексных чисел осуществляется также как сложение векторов.

2. Умножение комплексных чисел в основной форме

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + a_1 ib_2 + a_2 ib_1 + \underbrace{i^2}_{=-1} b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1); \quad (4)$$

3. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

   Из предыдущего вопроса известны формулы (2), из которых следует

$$a_1 = r_1 \cos\varphi_1; b_1 = r_1 \sin\varphi_1; a_2 = r_2 \cos\varphi_2; b_2 = r_2 \sin\varphi_2; \qquad (5)$$

Подставляем (5) в (4)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)] \to$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]; \qquad (6) \to$$

Вывод: Модуль произведения комплексных чисел в тригонометрической форме равен произведению модулей, аргумент произведения равен сумме аргументов.

4. Возведение в степень, формула Муавра

Для вычисления результата возведения в степень используем формулу (6):

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n-раз} = \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n-раз} [\cos(\underbrace{\varphi + \varphi + \ldots + \varphi}_{n-раз}) + i\sin(\underbrace{\varphi + \varphi + \ldots + \varphi}_{n-раз})] \to$$

$$z^n = r^n [\cos(\varphi n) + i\sin(\varphi n)]$$

5. Деление комплексных чисел в основной форме:

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \qquad (7)$$

где комплексное число z – результат деления в основной форме имеет вид: $z = x + iy;$ (8).

Здесь x, y -неизвестные действительная и мнимая части.

Выразим из (7) числитель: $z_1 = zz_2$ (9). Подставим (3) и (8) в (9):

$$a_1 + ib_1 = (x + iy)(a_2 + ib_2) \to a_1 + ib_1 = (xa_2 - yb_2) + i(xb_2 + a_2 y); \qquad (10)$$

Левая и правая части (10) представляют собой комплексные числа, которые равны (по 1 свойству), если равны их действительные и мнимые части:

$$\to \begin{cases} a_1 = xa_2 - yb_2 \\ b_1 = xb_2 + a_2 y \end{cases}$$ Решаем полученную систему по методу Кремера:

$$D = \begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2{}^2 + b_2{}^2; D_x = \begin{vmatrix} a_1 & -b_2 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 + b_1 b_2; D_y = \begin{vmatrix} a_2 & \mathrm{a}_1 \\ b_2 & \mathrm{b}_1 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - a_1 b_2;$$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2}; y = \frac{D_y}{D} = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2};$ (11). Подставляем (11) в (8):

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2{}^2 + b_2{}^2}; \qquad (12)$$

6. Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Подставляем (5) в (12):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)]}{r_2[\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2]} \to$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \to$$

Вывод: Модуль частного комплексных чисел в тригонометрической форме равен частному модулей, аргумент произведения равен разности аргументов.

7. Извлечение корня: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right];$

Пример. $z_1 = 1 + i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$.

Сложение: $z_1 + z_2 = \left(1 + \sqrt{3}\right) + 2i$

Тригонометрическая форма записи: $r_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $r_2 = \sqrt{3+1} = 2$;

$$\varphi_1 = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4};\ \varphi_2 = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $\quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Умножение в тригонометрической форме: $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right)$;

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

Вычисляя косинус и синус и раскрывая скобки, получим основную запись: $z_1 z_2 = 0,73 + 2,73i$.

Деление в тригонометрической форме: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right)$;

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$

Вычисляя косинус и синус и раскрывая скобки, получим основную запись: $\frac{z_1}{z_2} = 0,68 + 0,18i$.

Возведение в степень: $\left(z_1\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2\left(\cos\left(2\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)\right)$; $\left(z_1\right)^2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Вычисляя косинус и синус и раскрывая скобки, получим основную запись: $\left(z_1\right)^2 = 2i$

Извлечение корня: $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{4}\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{1}{4}\frac{\pi}{4}\right)\right)$; $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)$.

Вычисляя косинус и синус и раскрывая скобки, получим основную запись: $\sqrt[4]{z_1} = -0,21 + 1,07i$.

Векторная функция, производная этой функции и её геометрический смысл

Рассмотрим вектор $\overline{r}$, начало которого совпадает с началом координат, концом является точка M(x,y,z). Тогда этот вектор в координат будет иметь вид: $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$;

Пусть координаты данного вектора являются функциями одного того же параметра t, тогда вектор $\overline{r}$ будет при изменении параметра t менять свое направление и значение, т.е. являться функцией параметра t: $\overline{r} = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}$. (1)

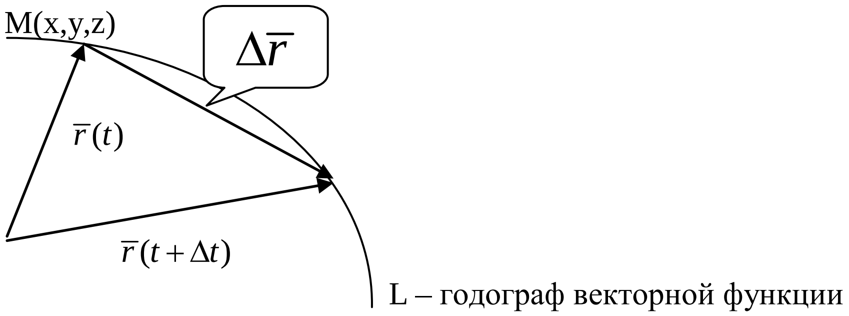
Определение: Векторной функцией называется вектор (1), координаты которого являются функциями параметра t.

Определение: Линия, которую описывается в пространстве конец вектора (1) называется годографом векторной функции.

Производная векторной функции

По определению производной: $\overline{r}' = \underset{\Delta t\to 0}{Lim}\dfrac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \underset{\Delta t\to 0}{Lim}\dfrac{\overline{r}(t+\Delta t)-\overline{r}(t)}{\Delta t}$ (2).

Значения векторной функции при $t+\Delta t$ и t , а также приращения векторной функции показаны на рисунке:



Вычисляем по формуле (1) значения векторной функции при $t+\Delta t$ и t и подставляем их в формулу (2):

$$\overline{r}' = \underset{\Delta t\to 0}{Lim}\frac{x(t+\Delta t)\overline{i} + y(t+\Delta t)\overline{j} + z(t+\Delta t)\overline{k} - x(t)\overline{i} - y(t)\overline{j} - z(t)\overline{k}}{\Delta t} =$$

$$= \underset{\Delta t\to 0}{Lim}\frac{[x(t+\Delta t)-x(t)]\overline{i} + [y(t+\Delta t)-y(t)]\overline{j} + [z(t+\Delta t)-z(t)]\overline{k}}{\Delta t}$$

В каждой квадратной скобке содержится приращение соответствующей функции

$$\overline{r}' = \underset{\Delta t\to 0}{Lim}\frac{\Delta x\overline{i} + \Delta y\overline{j} + \Delta z\overline{k}}{\Delta t} = \underset{\Delta t\to 0}{Lim}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\overline{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\overline{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\overline{k}\right) = \underset{\Delta t\to 0}{Lim}\frac{\Delta x}{\Delta t}\overline{i} + \underset{\Delta t\to 0}{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta t}\overline{j} + \underset{\Delta t\to 0}{Lim}\frac{\Delta z}{\Delta t}\overline{k}$$

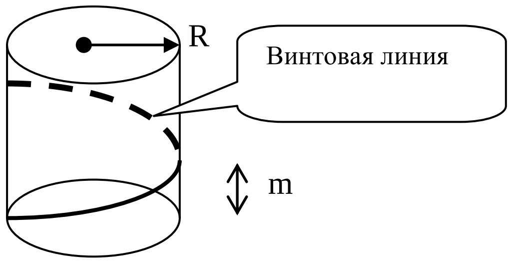
Каждый их пределов является по определению производной соответствующей функции:

$\to \overline{r}' = x'(t)\overline{i} + y'(t)\overline{j} + z'(t)\overline{k}$ (3)

При $\Delta t \to 0$ Δr стремиться к касательной в точке M(x,y,z).

Вывод: Производная векторной функции является вектором (3), направленным по касательной в данной точке, и имеющим следующую длину: $\left|\overline{r}'\right| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}$

Например: $\overline{r} = R\cos t\overline{i} + R\sin t\overline{j} + Rmt\overline{k}$; - винтовая линия (Геликоид), где R – радиус круга, m – шаг винтовой линии.



Вычислим производную от этой функции: $\overline{r}' = -R\sin t\cdot\overline{i} + R\cos t\cdot\overline{j} + m\cdot\overline{k}$ и модуль производной: $\left|\overline{r}'\right| = \sqrt{R^2 + m^2} = const$.

Вывод: Скорость скольжения материальной точки без трения по винтовой линии есть величина постоянная.