Множества и действия с ними.

Определение: Множеством называется совокупность однородных элементов определённой природы.

Действия с множествами:

1. Два множества A и B называются равными, если они имеют одинаковые элементы, причём повторяющиеся элементы считаются за один.

$$A = \{1,2\};\ B = \{1,1,2,2,2\},\ A = B$$

2. Множества A называются подмножеством B, если все элементы множества A входят в состав элементов множества B.

$$A = \{1,2\};\ B = \{1,2,3,4\} \quad A \subset B$$

3. Объединением двух множеств A и B называется множество $C = A \cup B$, состоящее из элементов принадлежащих или A, или B.

$$C = A \cup B = \{1,2\}\ \text{или}\ \{1,3,2,4\}$$

4. Пересечением множеств A и B называется множество $C = A \cap B$, состоящее из элементов одновременно принадлежащих этим двум множествам.

$$A = \{1,2\};\ B = \{2,3\};\ C = A \cap B = \{2\}$$

5. Разностью двух множеств A и B называется множество $C = A \setminus B$, состоящее из элементов принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B: $A=\{1,2\};\quad B=\{2,3\};\ \to C = A \setminus B = \{1\};\ D = B \setminus A = \{3\}$

Виды множеств:

1. Числовые множества

а) множества натуральных чисел: $N = \{1,2...\infty\}$.

б) множества целых чисел: $Z = \{-\infty,...,-1,0,1,...\infty\}$.

в) множества рациональных чисел: $Q = \left\{\frac{a}{b}, \forall a,b \in z\right\}$.

г) множества иррациональных чисел: $R=\left\{\sqrt{2},\sqrt{3},...\pi,...\right\}$.

д) множества комплексных чисел: $C=\left\{a+ib, i=\sqrt{-1}, \forall a,b \in R\right\}$

Замечание: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

2. Интервал: $(a,b)=\{x, a<x<b, \forall a,b \in R\}$

3. Отрезок: $[a,b]=\{x, a \le x \le b, \forall a,b \in R\}$

4. Окрестность: $O_\varepsilon(x_0)$-ипсилон окрестность точки x_0.

$$O_\varepsilon(x_0)=\{x, x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon, \forall x_0,\varepsilon \in R\}$$

5. Множества абсолютных величин: $|x| = \begin{cases} +x, x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

Свойства абсолютных величин:

1) $|x+y| \le |x| + |y|$ 2) $|xy| = |x||y|$ 3) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Понятие функции одного переменного, её свойства и способ задания.

Определение: Отображением множества X по множеству Y или функцией называется соответствие f, при котором каждому значению $x \in X$ соответствует одно и вполне определённое значение $y \in Y$.

Определение: Множество X называется областью определения функции, множество Y называется областью значения функции.

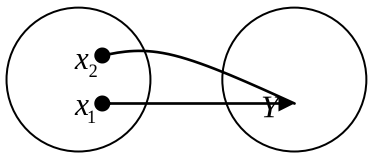
Замечание: Для функции одного переменного в качестве множеств X, Y выступает интервал или отрезок.

Свойства функций:

1. Взаимно однозначность.

Определение: Функция $f(x)$ называется взаимно однозначной, если $\forall x_1, x_2 \in X_1$, при $x_1 \neq x_2$ выполняется условие: $f(x_1) \neq f(x_2)$

Иллюстрация взаимно неоднозначной функции:



$$y = x^2 \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}\right\} y = 1$$

2. Монотонность (возрастание или убывание).

Определение: Функция $f(x)$ называется возрастающей, если $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, то выполняется следующее неравенство: $f(x_1) < f(x_2)$.

3. Ограниченность.

Определение: Функция $f(x)$ называется ограниченной, если $\forall x \in X$, то выполняется следующее неравенство $|f(x)| < M \quad (\forall M > 0, M \in R)$.

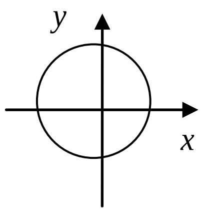
Способы задания функций:

а) аналитический: *явный*: $y = f(x)$; *неявный*: $F(x, y) = 0$

б) табличный:

x	0	$1/2$	1
y	1	$\sqrt{3}/2$	0

в) графический.



Обратная функция, её график. Сложная функция.

Обратная функция

Определение: Функция $f^{-1}(y)$ называется обратной по отношению к функции $f(x)$, если каждому значению $y \in Y$ соответствует одно и вполне определённое значение $x \in X$ при условии, что каждому $x \in X$ также соответствует одно и вполне определённое значение $y \in Y$.

Замечание: из определения следует, что обратная функция существует только для взаимно однозначных функций.

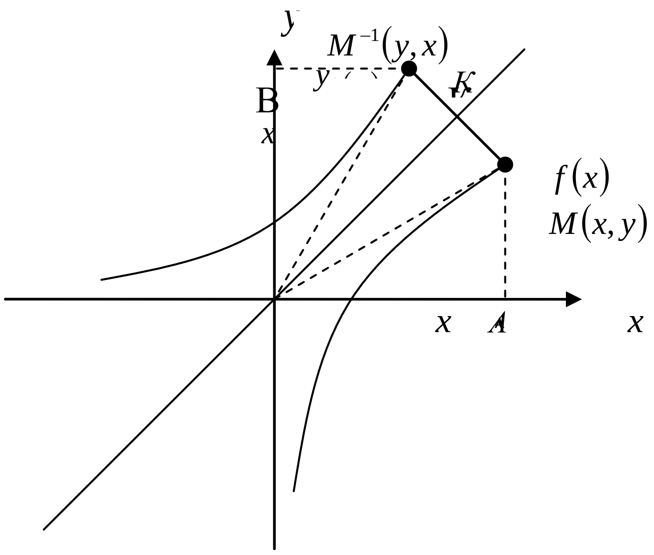
Теорема 1: Любая монотонная функция имеет обратную функцию с тем же характером монотонности.

Доказательство: Пусть $f(x)$ возрастает

$\forall x \in X \to x_1 < x_2,\ f(x_1) < f(x_2) \to x_1 \neq x_2,\ f(x_1) \neq f(x_2)$, значит функция $f(x)$ является взаимнооднозначной. Значит согласно замечанию функция имеет обратную функцию.

Теорема 2: График обратной функции симметричен графику исходной функции относительно прямой $y = x$.

Доказательство



$\forall M \in f(x)$. Из $\Delta OAM \to OM \to \sqrt{x^2+y^2}$; Из $\Delta OBM^{-1} \to OM^{-1} \to \sqrt{x^2+y^2}$

Рассмотрим $\Delta OKM^{-1} = \Delta OKM$ по гипотенузе и общему катету $\to KM = KM^{-1}$

Значит любая точка графика исходной функции симметрична соответствующей точке графика обратной функции, значит графики исходной и обратной функции симметричны.

Сложная функция.

Определение: Функция $y = f(g(x))$ называется сложной, если она составлена из 2-х или более функций: $y = f(z), z = g(x)$.

Замечание: Области определения и значения сложной функции обычно меньше, чем области определения и значения функции её составляющей.

Замечание: $Y_1 = Z \cap Z_1$

Пример: $y = \sqrt{\sin x}$

Для каждой в отдельности функций

$\to y = f(z) = \sqrt{z}$; Область определения: $Z \in [0, \infty)$, область значений: $Y \in [0, \infty)$

$\to z = g(x) = \sin x$; Область определения: $X \in (-\infty, \infty)$, область значений: $Z_1 \in [-1, 1]$

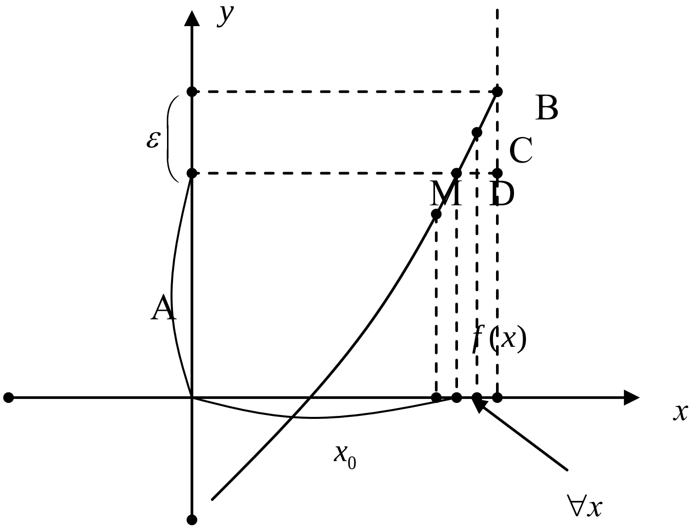
Для сложной функции

$y = f(g(x))$; Область определения: $X_1 \in [0 \pm 2\pi n, \pi \pm 2\pi n)$.

Область значений: $Y_1 = Z \cap Z_1 \to Y \in [0,1]$

<u>Предел функции в точке и на бесконечности.</u>

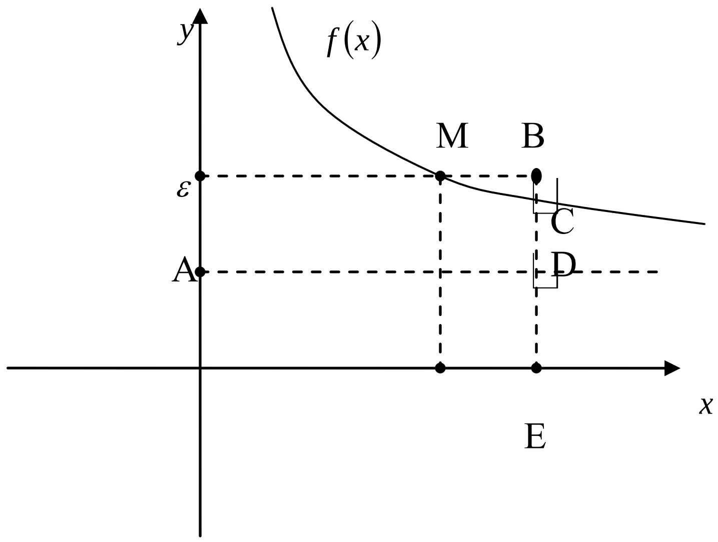
1. Определение: Число А называется пределом функции $f(x)$ в точке x, если $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in O_{\delta}(x_0)$ выполняется следующее неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.



EC – Расстояние от графика функций до оси абсцисс, равное значению функции $f(x)$, ED = A, CD = EC - ED = $|f(x) - A|$.

Из рисунка видно, что CD < BD = $\varepsilon \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, что и следовало подтвердить.

2. Определение: Число А называется пределом функции $f(x)$ на бесконечности, если $\forall\varepsilon > 0\ z\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x > \delta$ выполняется следующее неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.



EC = $f(x)$, ED = A, CD = EC - ED = $|f(x) - A|$, CD < BD = $\varepsilon \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, что и следовало подтвердить.

Замечание: Для того чтобы вычислить значение предела необходимо подставить x_0 в исходную функцию.

Обозначения пределов: 1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 2. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

№5 Бесконечно малые функции (б.м.) и их свойства.

Определение: Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0, если предел этой функции в этой точке равен нулю $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Из определения пределов функции в точке следует $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon \; (\forall \varepsilon) \to |\alpha(x)| < \varepsilon \quad (1)$.

Свойства б.м.

1. Если для двух функций выполняется неравенство: $|f(x)| < |\alpha(x)|$, где $\alpha(x)$- б.м., то $f(x)$ также будет б.м.

Доказательство:

$|f(x)| < |\alpha(x)| < \varepsilon \to |f(x)| < \varepsilon \to |f(x) - 0| < \varepsilon \to$ по определению предела - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, значит по определению б.м. $f(x)$– б.м.

2. Произведения б.м. на константу являются б.м.

Доказательство:

С – константа, $\alpha(x)$ - б.м., $f(x) = c\alpha(x)$. Из (1) учитывая, что ε - любое $\to |\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{|c|}$;

$|f(x)| = |c\alpha(x)| = |c||\alpha(x)| < |c|\dfrac{\varepsilon}{|c|} \to |f(x)| < \varepsilon$ значит $f(x)$-б.м.

3. Произведение б.м. на ограниченную функцию являются б.м. функцией.

Доказательство:

$\alpha(x)$ - б.м., $\to |\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$; $f_1(x)$- ограниченная функция

$\to |f_1(x)| < M$; (М – положительное число) $\to f(x) = \alpha(x) f(x)$

$|f(x)| = |\alpha(x)||f_1(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon \to |f(x)| < \varepsilon \to f(x)$– б.м.

4. Сумма двух б.м. является б.м..

Доказательство:

$\beta(x)-$ б.м. $\rightarrow |\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$; $\alpha(x)-$ б.м. $\rightarrow |\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$; $f(x)=\alpha(x)+\beta(x)$

$|f(x)|=|\alpha(x)+\beta(x)|\leq|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \rightarrow |f(x)|<\varepsilon,\ \ f(x)-$ б.м.

5. Произведение двух б.м. также является б.м.

Доказательство:

$\alpha(x)$ - б.м., $\rightarrow |\alpha(x)|<\sqrt{\varepsilon}$; $\beta(x)-$ б.м. $\rightarrow |\beta(x)|<\sqrt{\varepsilon}$; $f(x)=\alpha(x)\beta(x)$

$|f(x)|=|\alpha(x)||\beta(x)|<\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}=\varepsilon \rightarrow |f(x)|<\varepsilon,\ \ f(x)-$ б.м.

6. Связь предела и б.м.

Для того, чтобы число A являлось пределом функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)-A$ было б.м.

Доказательство:

Необходимость: пусть предел существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. По определению предела имеем:

$|f(x)-A|<\varepsilon \rightarrow |(f(x)-A)-0|<\varepsilon \rightarrow \lim|f(x)-A|=0 \rightarrow f(x)-A-$ б.м.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1: Если функция имеет предел, то он единственен.

Доказательство:

Используем метод от противного, т.е. предполагаем, что функция в одной и той же точке имеет два предела: 1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_1$, 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_2$

Используем шестое свойство б.м.: 1) $f(x)-A_1=\alpha_1$-б.м., 2) $f(x)-A_2=\alpha_2$-б.м

$\to \underbrace{A_2-A_1}_{A-const}=\underbrace{\alpha_1-\alpha_2}_{\alpha-б.м.(по\,4св-ву)}$

Константа не может быть равна б.м., значит получили противоречие, значит предположение о существовании двух пределов не верно, значит предел единственен.

Теорема 2: Если функция имеет предел, то она является ограниченной функцией.

Доказательство:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, требуется доказать, что $|f(x)|<M$ $(\forall M>0)$.

По шестому свойству б.м.: $f(x)-A=\alpha(x)\to f(x)=A+\alpha(x)\to$

$\to |f(x)|=|A+\alpha(x)|\le|A|+|\alpha(x)|<|A|+\varepsilon=M>0$ $\to|f(x)|<M\to f(x)$- ограниченная.

Теорема 3: Предел суммы двух функций равен сумме пределов вычисленных от каждой из этих функций.

Доказательство:

$f_1(x)\to\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=A_1$ (1), $f_2(x)\to\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=A_2$ (2), $f(x)=f_1(x)+f_2(x)\to\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ (3).

Решение: Из (1) и (2) функции вычислим f_1, f_2 по шестому свойству б.м.:

$f_1(x)=A_1+\alpha_1$ (4), $f_2(x)=A_2+\alpha_2$ (5);

$f(x)=f_1(x)+f_2(x)=A_1+\alpha_1+A_2+\alpha_2=(A_1+A_2)+\underbrace{(\alpha_1+\alpha_2)}_{\alpha-б.м.}=(A_1+A_2)+\alpha\to A=A_1+A_2$

$\lim\limits_{x\to 0}(f_1(x)+f_2(x))=\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)+\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$.

Теорема 4: Предел произведения двух функций равен произведению пределов вычисленных от каждой из этих функций.

Доказательство:

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)=(A_1+\alpha_1)(A_2+\alpha_2)=A_1A_2+A_1\alpha_2+A_2\alpha_1+\alpha_1\alpha_2=A_1A_2+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=A_1A_2+\alpha\to$$
$$\to A=A_1A_2\to\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)f_2(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f_1(x)\lim_{x\to x_0}f_2(x)$$

Замечание: предел константы равен самой константе.

Следствие из теоремы 4:

1. Константу можно выносить за знак предела:
$$\lim_{x\to x_0}Cf_1(x)=\lim_{x\to x_0}C\lim_{x\to x_0}f_1(x)=C\lim_{x\to x_0}f_1(x)$$
2. Предел степени функции равен степени предела от этой функции при условии, что эта степень – константа.
$$\lim_{x\to x_0}f(x)^n=\lim_{x\to x_0}\underbrace{\left(f(x)\times\ldots\times f(x)\right)}_{n-раз}=\lim_{x\to x_0}f(x)\times\ldots\times\lim_{x\to x_0}f(x)=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)^n$$

Теорема 5: Предел частного двух функций равен частному пределов, вычисленных от каждой из этих функций.

Доказательство:

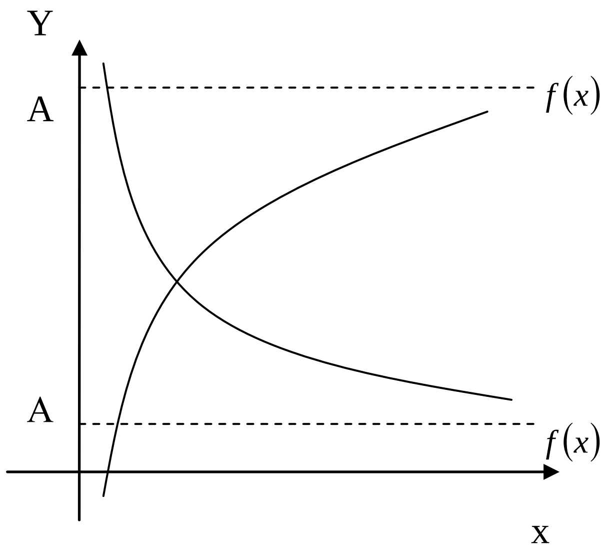
$$f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{A_1+\alpha_1}{A_2+\alpha_2}=\frac{A_1}{A_2}+\left(\frac{A_1+\alpha_1}{A_2+\alpha_2}-\frac{A_1}{A_2}\right)=\frac{A_1}{A_2}+\frac{A_1A_2+\overbrace{\alpha_1A_2}^{\gamma_2}-A_1A_2-\overbrace{A_1\alpha_2}^{\gamma_3}}{A_2{}^2+\underbrace{A_2\alpha_2}_{\gamma_1}}+\frac{\gamma_2-\gamma_3}{A^2+\gamma_1}=\gamma\frac{1}{M}+\frac{A_1}{A_2}=$$
$$\frac{A_1}{A_2}+\alpha\to A=\frac{A_1}{A_2}\to\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)}$$

Два признака существования предела.

1. Признак Вейерштрасса.

Если монотонная функция ограничена в направлении своей монотонности, то она имеет предел.

Замечание. Этот признак проиллюстрирован на следующем рисунке:



2. Если для трёх функций выполняется неравенство $|u(x)| < |f(x)| < |v(x)|$ и $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = A$ (1) $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = A$ (2), то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Доказательство:

По определению предела из формулы (1) следует:

$|u(x) - A| < \varepsilon \to -\varepsilon < u(x) - A < \varepsilon \to A - \varepsilon < u(x) < A + \varepsilon$,

аналогично из формулы (2):

$|v(x) - A| < \varepsilon \to -\varepsilon < v(x) - A < \varepsilon \to A - \varepsilon < v(x) < A + \varepsilon$

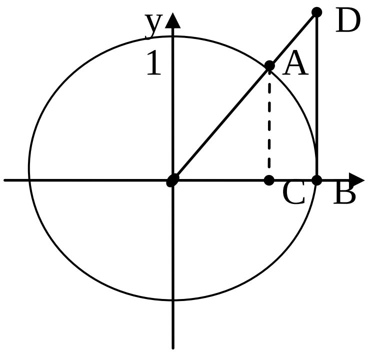
$A - \varepsilon < u(x) < f(x) < v(x) < A + \varepsilon$, $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \to A$ является пределом функции $f(x)$.

Два замечательных предела.

1. Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Доказательство:

Рассмотрим окружность единичного радиуса:



$$S_1=S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OB\cdot AC=\frac{1}{2}OB\cdot OA\cdot\sin x=\frac{\sin x}{2};S_2=S_{OAB}=\frac{1}{2}OA^2x=\frac{x}{2}$$

$$S_3=S_{\Delta ODB}=\frac{1}{2}OB\cdot DB=\frac{x}{2}OBtgx=\frac{1}{2}tgx;S_1<S_2<S_3;$$

$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}tgx\,|:\frac{1}{2}\sin x;\quad 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\to\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{u(x)}<\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{f(x)}<\underbrace{1}_{v(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}u(x)=\lim_{x\to 0}\cos x=1;\ \lim_{x\to 0}v(x)=\lim_{x\to 0}1=1\to$$

по второму признаку существования предела $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0};\ \dfrac{\sin x}{x}=1$.

2. Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e\quad(1)$

Получим из формулы (1) различные разновидности записи второго замечательного предела:

замена: $y=\dfrac{1}{x};\ x=\dfrac{1}{y};\ y\to 0\qquad\to\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e\quad(2)$.

Вычислим натуральный логарифм от левой и правой части:

$$\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}=\ln e\qquad\to\quad\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1\qquad(3)$$

Из формул (1) - (3) получим ещё более общие формулы:

$$\lim_{y\to 0}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{kx}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}\right)^{n}=\left(\textit{замена}: x=yk; y\to\infty\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{nx}=e^{kn}\quad(4);\quad \lim_{y\to 0}(1+ky)^{\frac{n}{y}}=e^{kn}\quad(5);\quad \lim_{y\to 0}\frac{n\ln(1+ky)}{y}=kn\qquad(6).$$

Сравнение бесконечно малых функций.

Определение: Две б.м. называются б.м. одного порядка малости, если предел их отношения существует и $\neq 0$, $\neq \infty$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \neq 0, \neq \infty$$

Определение: Две б.м. называются эквивалентными, если $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Определение: α называется б.м. более высокого порядка малости по сравнению с β, если: $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$

Это сравнение обозначается: $\alpha = 0(\beta)$

Определение: α называется б.м. более низкого порядка малости по сравнению с β, если $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$

Это сравнение обозначается: $\beta = 0(\alpha)$

Основные теоремы об эквивалентности б.м. функциях.

Теорема 1: Если две б.м. порознь эквивалентны третьей б.м., то они эквивалентны между собой.

Доказательство:

$$\alpha \sim \gamma;\ \beta \sim \gamma \to \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\gamma}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\gamma}\lim_{x\to x_0}\frac{\gamma}{\beta}=1\to\alpha\sim\beta$$

Теорема 2: Разность двух эквивалентных б.м. является б.м. более высокого порядка малости по сравнению с каждой из исходных б.м.. $\alpha \sim \beta$.

Доказательство:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}1-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=1-1=0\to\alpha-\beta=0(\alpha)$$

Теорема 3: Предел отношения двух б.м. не изменится, если их заменить на соответствующие им эквивалентные б.м..

Доказательство:

$$\alpha\sim\alpha_1;\ \beta\sim\beta_1\ \to\lim_{x\to x_0}\frac{x}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\alpha_1}\frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{\beta_1}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\alpha_1}\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_1}{\beta}\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

Пары эквивалентных б.м. в т. $x=0$.

1. $\sin x\sim x \qquad \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ (1 замечательные предел)
2. $tgx=x \qquad \lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot1=1$
3. $\arcsin x\sim x \qquad \lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(Замена=x=\sin y; y\to0\right)=\lim\limits_{y\to0}\frac{\arcsin\sin y}{\sin y}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y}{y}}=1$
4. $arctgx\sim x$
5. $\ln(1+x)\sim x; \qquad \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (2 замечательные предел)

Теорема 4: Сумма конечного числа б.м. эквивалентна б.м. самого низкого порядка малости, если такая б.м. в сумме единственно.

Доказательство:

$S=\alpha+\beta+...+\gamma$, α - б.м. самого низкого порядка малости - называется главной частью суммы б.м., остальные: $\beta=0(\alpha)...\ \gamma=0(\alpha)\to\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=0....\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\gamma}{\alpha}=0\ \beta_1$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{S}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha+\beta+...+\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}1+\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}}_{0}+...+\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{\gamma}{\alpha}}_{0}=1\to S\sim\alpha$$

Пример: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln^2(1+x)+tg^3x-\arcsin x^3}{x^2+\sin^4 2x+arctg7x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln^2(1+x)}{x^2}=\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2=\left(\lim\frac{x}{x}\right)^2=1$

Понятие односторонних пределов и непрерывности функций.

Определение: Число А называется пределом функции слева (левосторонний предел), если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Определение: правосторонний предел, если: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$=А.

Определение: Число А называется пределом функции в самой точке, если оба односторонних предела равны между собой.

Понятия непрерывной функции:

1. Определение: функция $f(x)$ называется непрерывной в т. x_0, если предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Для получения второго понятие непрерывности, представим правую часть, т.е. константу $f(x_0)$ через предел от этой константы:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$; $\lim\limits_{[x - x_0] \to 0} \left[f(x) - f(x_0) \right] = 0$

Обозначим: $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – превращение функции,

$\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента.

Тогда: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

2. Определение: Функция называется непрерывной в точке, если предел приращения функции в этой точке равен нулю при устремлении к нулю приращения аргумента.

Свойства непрерывных функций.

1. Непрерывность в точке.

1.1. Сумма, произведения и частное непрерывных функций является непрерывной функцией, если функция знаменателя не равна нулю.

Доказательство:

Пусть $f_1(x), f_2(x)$- непрерывные функции $\to \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)= f_1(x_0), \quad \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)= f_2(x_0)$

$f(x)= f_1(x)+ f_2(x)\to$ при $x = x_0$ функция сумма примет значение: $f(x_0)= f_1(x_0)+ f_2(x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)+ f_2(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)+\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)= f_1(x_0)+ f_2(x_0)= f(x_0)$

$\to f(x)-$ непрерывна в т. x_0.

1.2. Обратная функция составленная из непрерывных функций является непрерывной функцией.

1.3. Сложная функция, составленная из непрерывных функций, является непрерывной функцией.

1.4. Все элементарные функции непрерывны в области их определения.

Доказательство:

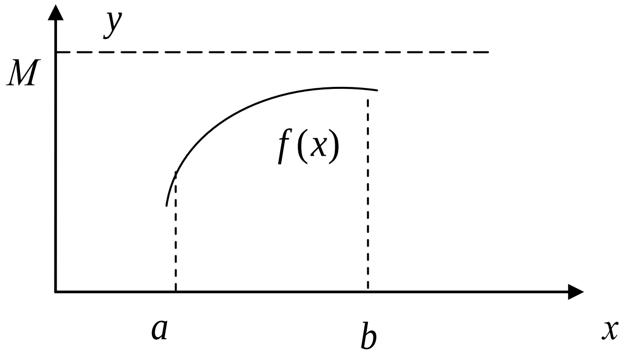
$y = a^x;\ \ \Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x a^{\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right);$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right) = a^x(1-1) = 0 \to a^x$ - непрерывная функция по второму определению непрерывности.

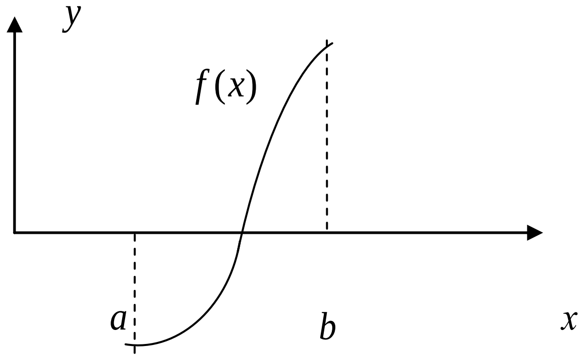
2. Непрерывность на отрезке.

Определение: функция называется непрерывной на отрезке, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

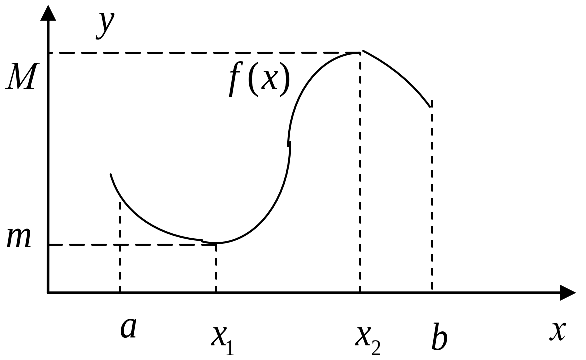
2.1. Если функция непрерывна на отрезке, то она является ограниченной функцией на этом отрезке.



2.2. Если функция непрерывна на отрезке и на концах этого отрезка принимаем различные по знаку значения, то внутри отрезка найдётся хотя бы одна, в которой функция равна нулю.



2.3. Если m, M - соответственно наименьшее и наибольшее значения функции на $[a,b]$, то $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, для которых выполняются неравенства: $f(x_1)=m; \quad f(x_2)=M$.

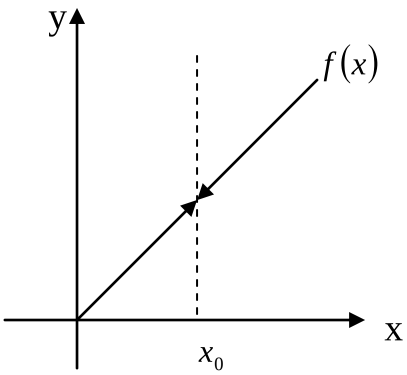


Точка разрыва и их классификация.

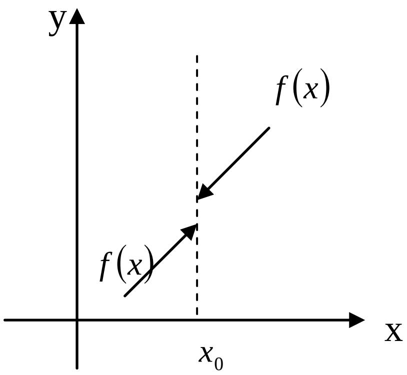
Определение: Точка x_0 называется точкой разрыва (т.р.), если в этой точке не выполняется условие непрерывности, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Классификация точек разрыва:

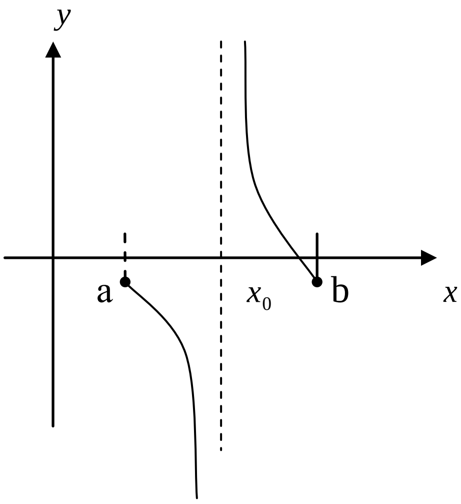
1. Устранимая т.р. первого рода, если выполняется следующие условия: $\lim\limits_{x\to x-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} \neq f(x_0)$



2. Т.р. первого рода типа скачка, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$



3. Т.р. второго рода, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty$



Понятие производной и необходимое условие её существования.

Определение: Производной от функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращения от момента стремится к нулю.

Обозначения производной: $y` \equiv f'(x) \equiv y'x \equiv f'_x(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Необходимый признак существования производной.

Если функция имеет производную в т. x, то она является непрерывной в этой точке.

Доказательство:

y' – существует.

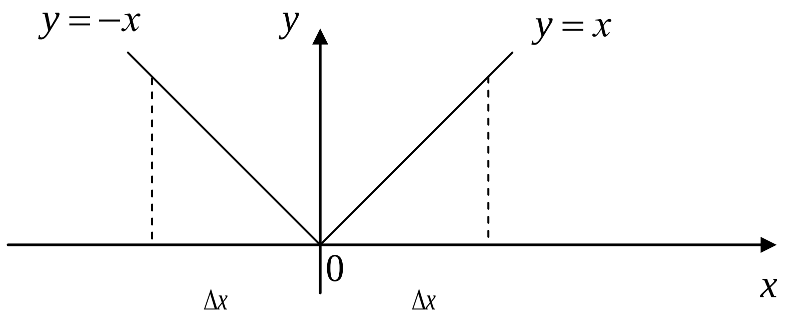
$\lim \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = y'(x) \cdot 0 = 0$, значит по определению функция является непрерывной.

Замечание: Производная от функции в общем случае также является функцией.

Замечание: Производная существует только для непрерывных функций.

Замечание: Обратной теоремы не существует, т.е из того, что функция непрерывная в точке не следует, что существует производная от этой функции в этой точке.

Например: функция: $y = |x|$ имеет следующий график



Вычислим производные через приращение функции справа и слева от точки x = 0

Справа: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$. Слева: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$

Получилось, что односторонние пределы не равны, значит производная в точке x = 0 не существует, хотя, как видно из рисунка, функция $y = |x|$ является непрерывной.

Дифференциал функции и необходимые условия дифференцирования.

Пусть для функции $y = f(x)$ существует производная $\to f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Используем шестое свойство б.м.: $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$ -б.м..

Найдем: $\Delta y = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\gamma_1} + \underbrace{\alpha\Delta x}_{\gamma_2} \to \Delta y -$б.м.

Сравним б.м. γ_1, γ_2 с б.м. Δx.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\gamma_1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \to \gamma$ и Δx - одного порядка малости.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\gamma_2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0 \to \gamma_2 = 0(\Delta(x))$

γ_1 - б.м. более низкого порядка малости, чем γ_2, значит $\Delta y \sim \gamma_1$ согласно теореме 4 об эквивалентных бесконечно малых (б.м.) $\to$ б.м. γ_1 является главной частью приращения функции.

Определение: дифференциалом функции называется главная часть приращения этой функции.

Вычислим дифференциал функции $y = x$: $dx = x'\Delta x$; $x' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}$; $dx = \Delta x \to \beta$.

Значит: дифференциал аргумента равен приращению этого аргумента.

Определение: Дифференциал функции равен производной от этой функции, умноженное на дифференциал аргумента этой функции: $dy = f'(x)dx$

Приращение функции через дифференциал: $\Delta y = dy + \alpha\Delta x$ (1).

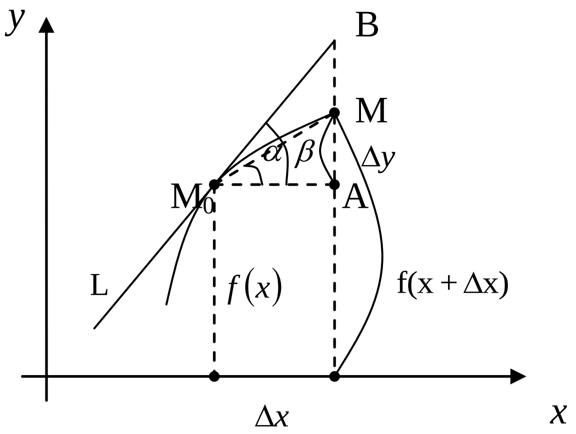
Вывод: дифференциал функции используется для приближённого вычисления приращения функции.

Условие дифференцируемости:

Функция является дифференцируемой, если для неё существует производная или дифференциал, а условие (1) – является условием дифференцируемости.

Геометрический и механический смысл производной и дифференциала.

1. Геометрический смысл (задача Лейбница о касательной).



L - касательная к графику функции $f(x)$ в т. M_0.

В пределе, при $\Delta x \to 0$; $\alpha \to \beta$; $tg\alpha \to tg\beta$

$$AM = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y; \quad tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

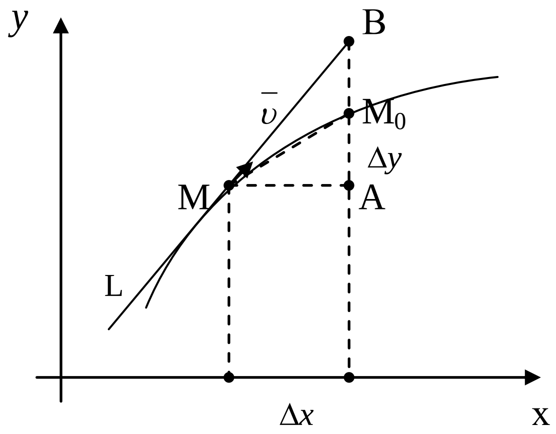
Вывод: производная в точке численно равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной в этой точке.

Составим уравнение касательной в следующем виде:

$$y = y_0 + k(x - x_0); \quad k = tg\beta; \quad y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0); \quad dy = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{f'(x)}; \quad AB = tg\beta\Delta x$$

Вывод: Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведённой в данной точке.

2. Механический смысл производной и дифференциала (задача Ньютона о скорости движения математической точки).



Если точка М движется с постоянной скоростью, то она пройдёт путь по прямой MM_0 равной Δy .Средняя скорость за время Δx $\upsilon_{ср} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, мгновенная скорость движения точки $\upsilon = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \upsilon = f'(x)$.

Вывод 1: производная численно равна мгновенной скорости движения точки.

Вывод 2: вектор скорости направлен по касательной проведённой в данной точке.

Вывод 3: дифференциал функции численно равен пути, который могла бы пройти точка за время Δx, двигаясь с постоянной скоростью.

Производные: константы, суммы, произведения и частные.

Теорема 1: Производная от константы равна нулю.

Доказательство:

$$y = f(x) = c - const \to y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

Теорема 2: Производная от суммы двух функций равна сумме производных от каждой из этих функций.

Доказательство:

$$y = f(x) = u(x) + v(x); \quad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x) + v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$$

$$\to (u + v)' = u' + v'$$

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u \quad (1)$$
$$v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v \quad (2)$$

Теорема 3: Производная произведения вычисляется по следующей формуле: $(uv)' = u'v + uv'$.

Доказательство:

$$y = f(x) = u(x)v(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v}_{0} = uv' + vu'$$

Следствие из теоремы 3: постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$(cv)' \overset{T3\,(T1)}{=} c'v + cv' = 0 + cv' = cv'$$

Теорема 4: Производная частного двух функций вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доказательство:

$$y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{uv + \Delta uv - uv - u\Delta v}{\Delta x\left(v^2 + v\Delta v\right)} +$$

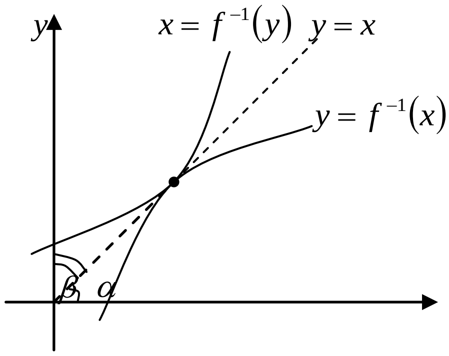
$$+ \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v - \lim\limits_{\Delta x \to 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v^2 + \underbrace{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v\Delta v}_{=0,}} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

.

Предел в знаменателе равен нулю, по второму определению непрерывности.

Производная обратной и сложной функции.

1. Производная обратной функции.



$$tg\alpha = y'_x \quad ; \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha ; \quad tg\beta = x'_y$$

$$x'_y = tg\beta = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{y'_x}; \qquad x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

2. Производная сложной функции: $y = f\left(g\left(x\right)\right)$

Представим сложную функцию как две в отдельности простые функции:

$$1)\, y = f\left(z\right) \qquad 2)\, z = g\left(x\right)$$

Для каждой из этих двух функций, вычислим приращение этих функций, используя условие дифференцируемости этих функций:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta y = f'(z)\Delta z + \gamma_1 \Delta z \\ \Delta z = g'(x)\Delta x + \gamma_2 \Delta x \end{array}\right\rangle \to f'(x)g'(x)\Delta x + f'(z)\gamma_2 \Delta x - \gamma_1 g'(x)\Delta x + \gamma_1\gamma_2\Delta x$$

Вычислим производную:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f'(z)g'(x) + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} y'(z)\gamma_2}_{=0(т.к.\,\gamma_2 - б.м.)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} g'(x)\gamma_1}_{=0(т.к.\,\gamma_1\ \ б.м.)} + \overbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\gamma_1\gamma_2}^{=0} = f'(z)g'(x)$$

$$\to \left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'(z)g'(x)$$

Вывод: Производная сложной функции равна произведению производных, входящих в сложную функцию, вычисленных каждая по своему аргументу.

Свойство инвариантности дифференциала. Производные параметрических и неявных функций.

1. Свойство инвариантности (неизменности) дифференциала.

Теорема 1: Выражение дифференциала не изменится, если вместо аргумента функции подставить функцию другого аргумента.

Доказательство: $dy = f'(x)dx$ пусть $x = x(t)$, t - аргумент $\to dy = f'(x(t))dt = f'(x)\underbrace{x'(t)dt}_{dx} =$

$= f'(x)dx$

2. Производная параметрической функции.

$\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\right\}$ параметрический способ задания функции.

Для функции $x(t)$ составим обратную функцию $t = t(x) \to y = y(t(x)) \to$

$t = t(x) \to y = y(t(x)) \to y' = y'(t)t(x) = y'(t)\dfrac{1}{x'(t)}$ $\to y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

3. Производная неявной функции.

Правило: Производная неявной функции $F(x, y) = 0$ вычисляется по правилу дифференцирования сложной функции, считая y - функцией от x.

Замечание: При дифференцировании y в уравнении $F(x, y) = 0$ ставится y'.

Например:

$x^2 + y^2 = 1 \to 2x + 2yy' = 0 \to y' = -\dfrac{x}{y}$

Производные основных 13 элементарных функций.

1. $y = a^x$

$$\Delta y = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right) \to y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Замена: $z = a^{\Delta x} - 1 \to a^{\Delta x} = 1 + z \to \ln a^{\Delta x} = \ln(1+z) \to \Delta x \ln a = \ln(1+z) \to \Delta x = \dfrac{\ln(1+z)}{\ln a}$

$$\to y' = a^x \lim_{z \to 0}\frac{z \ln a}{\ln(1+z)} = a^x \ln a \frac{1}{\underbrace{\lim_{z \to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}}_{=1,\,как\,2\,замечательный\,предел}} = a^x \ln a \qquad \to \left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

2. $y = e^x$

$$y' = e^x \ln e = e^x \qquad \to \left(e^x\right)' = e^x$$

3. $y = \log_a x$

$x = a^y$ - обратная функция $\to x' = \dfrac{1}{y'} \qquad \to y' = \dfrac{1}{x'}$

$x' = a^y \ln a = x \ln a; \qquad y' = \dfrac{1}{x \ln a} \qquad \to \left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

4. $y = \ln x$

$$y' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x} \qquad \to \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

5. $y = x^n$

$y = e^{\ln x^n} = e^{n \ln x}$ - сложная функция $\to y' = e^{n \ln x} n \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^n n}{x} = n x^{n-1} \to \left(x^n\right)' = n x^{n-1}$

6. $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Используем формулу тригонометрии: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}\cos\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right).$

$$\to y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x \to \left(\sin x\right)' = \cos x$$

7. $y=\cos x$

Используем формулы приведения: $y'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(-1)=-\sin x$

$\rightarrow(\cos x)'=-\sin x$

8. $y=tgx$

Используем формулу производной частного: $y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$

$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

9. $y=ctgx$

Аналогично: $\rightarrow(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

10. $y=\arcsin x$

Составим обратную функцию: $x=\sin y$. Вычислим производную обратной функции:

$\rightarrow x'=\cos y=\sqrt{\cos^2 y}=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}\rightarrow y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\rightarrow(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y=\arccos x$

Аналогично: $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $y=arctgx$

Составим обратную функцию: $x=tgy$. Вычислим производную обратной функции:

$x'=\frac{1}{\cos^2 y}=\frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\cos^2 y}=tg^2 y+1=1+x^2\rightarrow y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{1+x^2}$ $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$

13. $y=arcctgx$

Аналогично: $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Производные и дифференциалы высших порядков.

Определение: Производной n - го порядка называется производная, вычисленная от производной $n-1$-го порядка.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' \to y'' = \left(y'\right)'$$

Производная n - го порядка для функции e^x и $\ln x$.

1. $y = e^x \to y^{(n)} = e^x$

2. $y = \ln x$

$$y' = \frac{1}{x}; \quad y'' = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1!}{x^2}; \; y''' = \frac{2}{x^3} = \frac{2!}{x^3}; \; y^{IV} = -\frac{6}{x^4} = -\frac{3!}{x^4} \quad \to y^{(n)} = \frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{x^n}$$

Определение: Факториал числа n называются производные чисел натурального ряда от единицы до n, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$

Замечание: $0! = 1$

Определение: Дифференциалом n - го порядка называется дифференциал, вычисленный от дифференциала $n-1$ - го порядка.

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right) \to d^2 y = d\left(dy\right)$$
$$dy = f'(x)dx \to d^2 y = d\left(f'(x)dx\right) = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2$$

Замечание: Полученная формула справедлива только для простых функций.

Производная второго порядка неявной функции

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} \to y'' = \frac{\left(y'(x)\right)'_t}{x'_t}$$

Теорема Ферма.

Определение: Функция $f(x)$ принимает в точке x_0 максимальное значение, если $\forall x \in O_\varepsilon(x_0)$ выполняется следующее неравенство: $f(x) \le f(x_0)$.

Замечание: Равенство возможно, если $f(x) - const$.

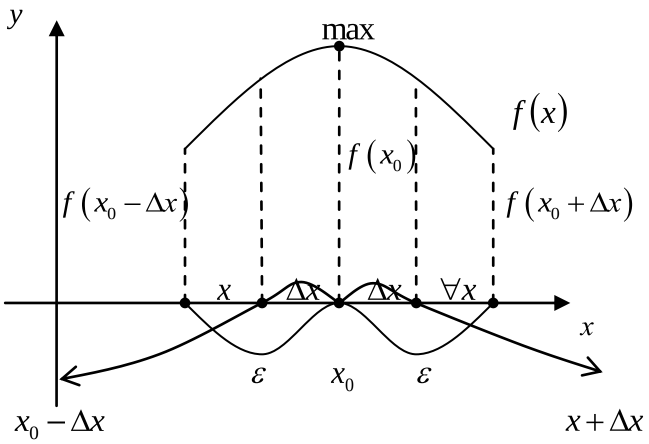
Определение: Функция $f(x)$ принимает в точке x_0 минимальное значение, если $\forall x \in O_\varepsilon(x_0)$ выполняется неравенство: $f(x) \ge f(x_0)$.

Замечание: Максимум и минимум функции объединяются понятием экстремума функций.

Теорема: Если $f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a,b]$ и в точке $x_0 \in (a,b)$ достигается экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство:

Пусть в точке $f(x_0)$ достигает своего максимума.



Вычислим производную слева и справа от точки x_0:

$$\Delta x < 0;\ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}^{\le 0}}{\underset{<0}{\Delta x}} \ge 0, \qquad \Delta x > 0;\ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{\Delta x}_{>0}} \le 0$$

Решаем совместно систему полученных неравенств: $\begin{cases} y' \ge 0 \\ y' \le 0 \end{cases} \to y' = f'(x_0) = 0$

Терема Ролля

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на [a,b] и дифференцируема на (a,b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка x_0, в которой $f'(x_0)=0$.

Доказательство

1. случай f(x)=const, f(a)=f(b)=C$\rightarrow$эта функция удовлетворяет условию теоремы $f'(x)=C'=0, \forall x\in(a,b)\rightarrow f'(x_0)=0\forall x_0\in(a,b)$
2. случай f(x)$\neq$ const
   По условию функция непрерывна на [a,b] $\rightarrow$ на [a,b], по свойству нерерывных функций на отрезке, функция имеет на [a,b] минимум и максимум в каких-то точках x_0 и x_1. Пусть x_0=a, x_1=b, тогда по условию теоремы f(a)=f(b) минимум и максимум будут равны, тогда f(x)=const, и по первому случаю $f'(x_0)=0$. Пусть $x_0\in(a,b)$, тогда точка экстремума лежит внутри отрезка и по теореме Ферма $f'(x_0)=0$.

$$\rightarrow f'(x_0)=0\forall x_0\in(a,b)$$

Теорема Коши

Теорема: Если функции f(x) и g(x) непрерывны на [a,b] и дифференцируемы на (a,b) и $g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$, то внутри [a,b] найдется хотя бы одна точка x_0, в которой выполняется следующее равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad (1)$$

Доказательство

1. Докажем существование формулы (1). По условию теоремы $g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b) \to g(b)-g(a)\neq 0$, иначе по теореме Ролля $g'(x)\neq 0,$, т.к. $g(b)-g(a)=0 \to g(b)=g(a) \to$ формула (1) существует.
2. Докажем правильность формулы (1). Для этого составим вспомогательную функцию: $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$

Вычислим значения этой функции на границах отрезка [a,b]:

$$F(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(a)-g(a)]=0;$$

$$F(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(b)-g(a)]=0;$$

Вспомогательная функция на границах отрезка [a,b] принимает одинаковые значения, значит по теореме Ролля внутри отрезка найдется хотя бы одна точка x_0, в которой $F'(x_0)=0$. Вычислим производную

$F'(x)=f'(x)-0-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g'(x)-0]$ и её значение в точке x_0

$$F'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)=0 \to \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Теорема Лагранжа

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на [a,b] и дифференцируема на (a,b), то внутри [a,b] найдется хотя бы одна точка x_0, в которой выполняется следующее равенство:

$$f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a) \quad (1)$$

Доказательство

Рассмотрим две функции f(x) и g(x)=x. g(x)=x – непрерывная и дифференцируемая функция, значит можно применить для них теорему Коши:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(x_0)}{1} \to f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$$

Правило Лопиталя

Это правило используется для раскрытия неопределенностей вида: $\left[\frac{0}{0}\right];\left[\frac{\infty}{\infty}\right];$

1 случай. Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$; при $x \to x_0$

Теорема: Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы $\forall x \in O_\varepsilon(x_0)$ и $f(x_0)=g(x_0)=0$, то предел отношения функции равен пределу отношения их производных: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство

Рассмотрим интервал (x_0,x) и используем не этой интервале теорему Коши:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{x})}$, где $\overline{x}\in(x_0,x); x\to x_0; \overline{x}\to x$. По условию

$f(x_0)=g(x_0)=0 \to \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$ Вычислим предел левой и правой части

$\to \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2 случай. Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$; при $x \to \infty$

Теорема: Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы $\forall x \in R$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_0) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x_0) = 0$, то предел отношения функции равен пределу отношения их производных: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство

Замена: $x = \frac{1}{t} \to t = \frac{1}{x}; x \to \infty; t \to 0;$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} \overset{1 случай}{=} \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} \xrightarrow{\textit{обратная}\text{ замена}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3 случай. Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; при $x \to x_0$

Теорема: Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы $\forall x \in O_\varepsilon(x_0)$ и $f(x_0) = g(x_0) = \infty$, то предел отношения функции равен пределу отношения их производных: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

4 случай. Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; при $x \to \infty$

Теорема: Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы $\forall x \in R$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_0) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x_0) = \infty$, то предел отношения функции равен пределу отношения их производных: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Замечание: Если после однократного применения правила Лопиталя неопределенность останется, то это правило используется повторно необходимое число раз.

Пример №1 Переход от произведения к частному

$$\lim_{x\to 0} x^{123} Ln(123x) = \left[0 \times (-\infty)\right] = \lim_{x\to 0} \frac{Ln(123x)}{x^{-123}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{123x}123}{-123x^{-124}} = \frac{1}{-123} \lim_{x\to 0} x^{123} = 0;$$

Пример №2 Предварительное логарифмирование

$\lim\limits_{x\to 0} 123x^{x^{123}}$ Обозначим $y = 123x^{x^{123}}$. Вычислим натуральный логарифм от левой и правой части $Ln(y) = Ln\left(123x^{x^{123}}\right) = x^{123} Ln\left(123x\right)$. .Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0} Ln(y) = \lim_{x\to 0} x^{123} Ln\left(123x\right) \overset{Пример №1}{=} 0 \to$$

$$\lim_{x\to 0} Ln(y) = 0 \to \lim_{x\to 0} y = e^{0} = 1 \to \lim_{x\to 0} 123x^{x^{123}} = 1.$$