АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Уравнения линии и поверхности.

Определение: Уравнение $f(x,y)=0$ называется уравнением линии на плоскости, если координата любой точки этой линии удовлетворяет данному уравнению.

Определение: Уравнение $f(x,y,z)=0$ называется уравнением поверхности в пространстве, если координаты любой точки этой поверхности удовлетворяют данному уравнению.

Определение: Алгебраическим уравнением линии называется уравнение вида:

$$\sum_{i=0}^{n} A_i x^{\alpha i} y^{\beta i}=0,\ A_i=const.$$

Определение: Алгебраическим уравнением поверхности называется уравнение вида:

$$\sum_{i=0}^{n} A_i x^{\alpha i} y^{\beta i} z^{\gamma i}=0.$$

Определение: Порядком уравнения линии называется число $P=\max\{\alpha_i+\beta_i\}$

Определение: Порядком уравнения поверхности называется число

$$P=\max\{\alpha_i+\beta_i+\gamma_i\}$$

Замечание: Алгебраическое уравнение заданного порядка составляется всеми возможными комбинациями степеней: $\alpha_i+\beta_i$ или $\alpha_i+\beta_i+\gamma_i$ от 0 до Р.

Уравнения линии 1-го и 2-го порядков:

$$P=1\to A_0+A_1x+A_2y=0$$

$$P=2\to A_0+A_1x+A_2y+A_3x^2+A_4y^2+A_5xy=0$$

Уравнение поверхности 1-го и 2-го порядков:

$$P=1\to A_0+A_1x+A_2y+A_3z=0$$

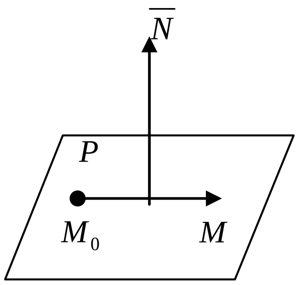
$$P=2\to A_0+A_1x+A_2y+A_3z+A_4x^2+A_5y^2+A_6z^2+A_7xy+A_8xz+A_7yz=0$$

Линии и поверхности первого порядка.

Теорема: Любая прямая на плоскости описывается уравнением линии первого порядка: $L: Ax + By + C = 0$.

Теорема: Любая плоскость в пространстве описывается алгебраическим уравнением поверхности 1-го порядка: $P: Ax + By + Cz + D = 0$

Доказательство:



Рассмотрим вектор $\overline{N}(A,B,C)$; $N \perp P$ и точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$ с заданными координатами. Выберем: $\forall M(x,y,z) \in P$ с произвольными координатами.

Замечание: Для составления нужного уравнения необходимо связать произвольные координатами с исходными данными.

Составим по двум точкам вектор и используем свойства скалярного произведения:

$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$; $\overline{N} \perp \overrightarrow{M_0M} \to \left(\overline{N}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0 \to$

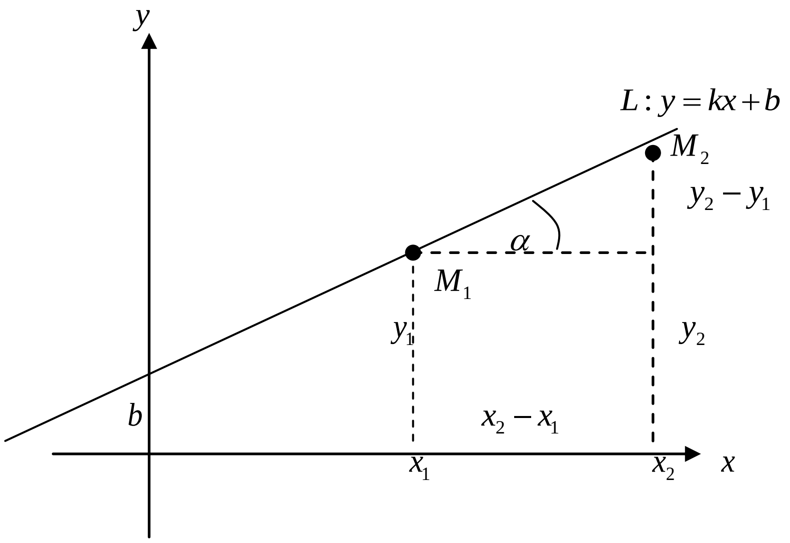
$\to A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) \to Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$

$Ax + By + Cz + D = 0$ *ч.т.д.*

Прямая на плоскости. Девять видов уравнения.

1. Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$ (1).
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом:
   Это уравнение получается из первого, если из него выразить y

$$y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B} \to y = kx + b \quad (2).$$



$$M_1(x_1 y_1) \in L;\ M_2(x_2 y_2) \in L; \to tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\overbrace{kx_2 + b}^{y_2} - \overbrace{kx_1 - b}^{y_2}}{x_2 - x_1} = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = k$$

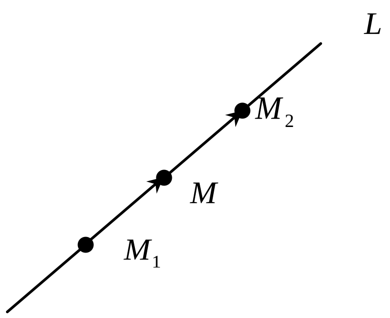
Замечание: Коэффициент b обозначает смещение прямой по оси y.
Замечание: Коэффициент k численно равен tg угла наклона прямой к оси абсцисс.

3. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку: $M_0(x_0 y_0)$

Подставим координаты точки M_0 в уравнение (2) и выразим из полученного уравнения коэффициент b: $y_0 = kx_0 + b \to b = y_0 - kx_0$

Подставляем b в уравнение (2): $y = kx + y_0 - kx_0 \to y = k(x - x_0) + y_0 \quad (3)$.

4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $M_1(x_1; y_1)$; $M_2(x_2; y_2)$



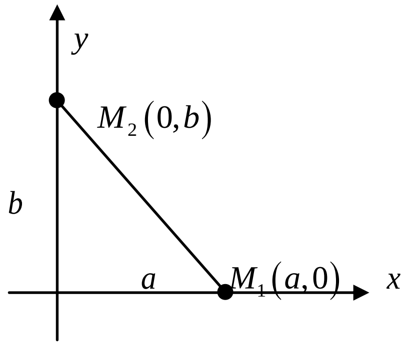
Выбираем: $\forall M(x, y) \in L$.

Составляем два вектора:

$$\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1);\ \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

$\overrightarrow{M_1M} \mid \mid \overrightarrow{M_1M_2} \rightarrow$ значит, координаты этих векторов пропорциональны $\rightarrow \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}\ (4)$

5. Уравнение прямой в отрезках.



Дано: a, b -отрезки.

Подставляем координаты точек M_1, M_2 в (4)уравнение, получим (5).

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y-0}{b}\rightarrow b(x-a)=-ya\rightarrow bx-ab+ay=0$$

$$bx-ay=ab \mid : ab \rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (5)$$

6. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору.

Дано: $M_0(x_0, y_0)$; $\vec{N}(A,B)$

Выберем: $\forall M(x,y)\in L$

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0);\rightarrow \vec{N}\perp\overrightarrow{M_0M}\rightarrow\left(\vec{N_0},\overrightarrow{M_0M}\right)=0\rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \quad (6)$$

Замечание: Коэффициенты A и B в первом уравнении обозначают координаты нормального к прямой вектора.

7. Параметрические уравнения прямой.

Дано: $M_0(x_0y_0)\in L$; $\bar{l}(m,n)\in L$, $\bar{l}$-направляющий вектор прямой.

t - параметр, от которого зависят координаты любой точки.

$$\begin{aligned} x&=x_0+mt \\ y&=y_0+nt \end{aligned} \quad (7)$$

8. Каноническое уравнение прямой.

Это уравнение получается из седьмого, если выразить из них параметр t.

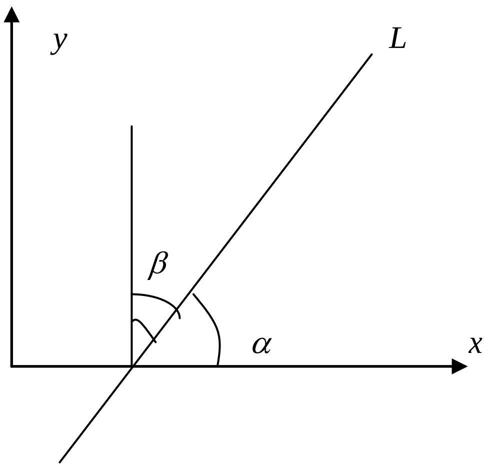
$$t=\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}\quad (8)$$

Замечание: Уравнения (4)-(8) всегда можно привести к общему виду уравнения (1).

9. Нормальные уравнения прямой.

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-P=0\quad (9)$$

$\cos\alpha,\cos\beta-$ направляющие косинусы прямой.



P - расстояние от начала координат до прямой.

Девятое уравнение получается из первого, умножением первого уравнения на коэффициент.

$$SgnC=\begin{cases}+1, если\, C>0\\ 0, если\, C=0\\ -1, если\, C<0\end{cases}\qquad M=-\frac{SgnC}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

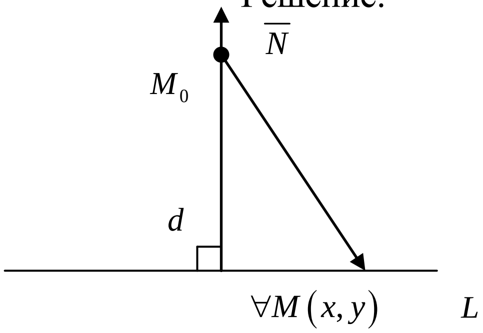
$$Пример:\ 2x-y+5=0\ \ M=-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{y}{\sqrt{5}}-\frac{5}{\sqrt{5}}=0\to P=\sqrt{5}$$

Две задачи на прямую на плоскости.

1. Расстояние от точки до прямой.

Дано: $M_0\left(x_0 y_0\right)$; $L: Ax+Bx+C=0$

Решение:



Из уравнения плоскости: $\overrightarrow{N}\left(A,B\right)\perp L$

Замечание: Для нахождения координат точки M, значение x задается произвольно, обычно $x=0$, а значение y находится из уравнения линии.

$$x=0,\ y=-\frac{C}{B}\rightarrow M\left(0,-\frac{C}{B}\right)$$

$$\overrightarrow{M_0M}\left(x-x_0,y-y_0\right);\ d=\left|Пр_{\overrightarrow{N}}\overrightarrow{M_0M}\right|=\left|\frac{\left(\overrightarrow{N},\overrightarrow{M_0M}\right)}{\left|\overrightarrow{N}\right|}\right|$$

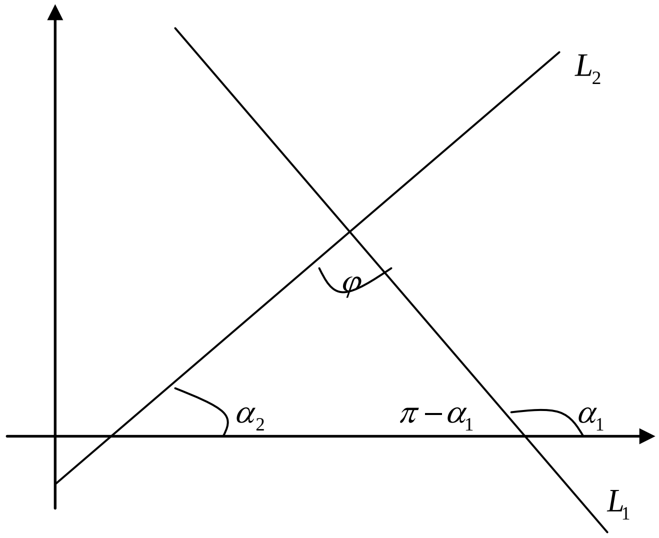
$$d=\left|\frac{A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

2. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Дано: $L_1 : y = k_1 x + b_1; \quad L_2 : y = k_2 x + b_2$

Найти: $\angle\varphi = L_1, L_2 = ?$

Решение:



Из геометрического смысла угловых коэффициентов имеем: $k_1 = tg\alpha_1; \; k_2 = tg\alpha_2$

Из рисунка: $\varphi = \pi - \alpha_2 - \pi + \alpha$

$$\to \varphi = \alpha_1 - \alpha_2 \to \; tg\varphi = tg\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) \to$$

$$tg\varphi = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} \to \quad tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$$

$L_1 \parallel L_2 \to \varphi = 0 \to tg\varphi = 0 \to k_1 = k_2$ - условие параллельности двух прямых.

$L_1 \perp L_2 \to \varphi = \frac{\pi}{2} \to tg\varphi = \infty \to 1 + k_1 k_2 = 0 \to k_1 = -\frac{1}{k_2}$ - условие перпендикулярности двух прямых.

Плоскость в пространстве. Шесть видов уравнений.

1. Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$.

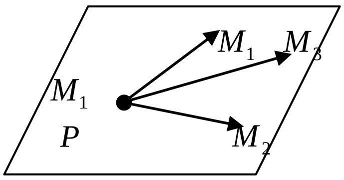
2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0\left(x_0 y_0 z_0\right) \perp$ заданному вектору $\overrightarrow{N}\left(A,B,C\right)$.

$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0$.

Замечание: В общем уравнении коэффициенты A,B,C обозначают координаты нормального к плоскости вектора.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три данных точки.

$M_1\left(x_1 y_1 z_1\right), M_2\left(x_2 y_2 z_2\right), M_3\left(x_3 y_3 z_3\right)$



$\forall M\left(xyz\right) \in P$

$\overrightarrow{M_1 M}\left(x - x_1, y - y_1, z - z_1\right); \overrightarrow{M_1 M_2}\left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right); \overrightarrow{M_1 M_3}\left(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\right)$.

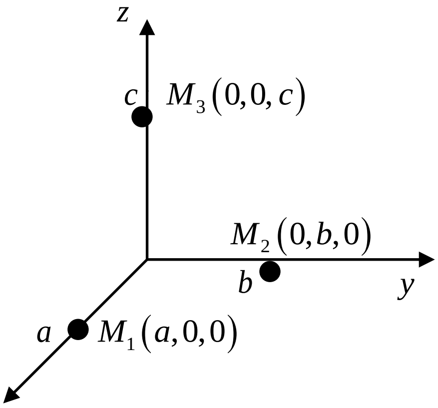
Получим три компланарных вектора.

Значит, согласно приложению смешанного произведения, определитель, составленный из координат этих векторов равен нулю.

$$\begin{vmatrix} x - x_1, y - y_1, z - z_1 \\ x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3).$$

Замечание: Это уравнение приводится к общему виду, если раскрыть определитель по первой строке.

4. Уравнение плоскости в отрезках.



Подставляем координаты полученных точек в третье уравнение.

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-a)bc - y(-ac) + zab = 0 \quad \Big| : abc;$$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ - уравнение плоскости в отрезках.

5. Параметрическое уравнение плоскости.

Дано: $M_0(x_0 y_0 z_0) \in P$; $P(P_1, P_2, P_3)$; $\overline{q}(q_1, q_2, q_3)$

$\overline{P}, \overline{q}$ -направляющие векторы плоскости.

t, S -параметры, от которых зависят координаты произвольной точки плоскости.

$x = x_0 + P_1 t + q_1 S$

$y = y_0 + P_2 t + q_2 S$ - параметрическое уравнение плоскости.

$z = z_0 + P_3 t + q_3 S$

6. Нормальное уравнение плоскости: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma -$ направляющие косинусы плоскости.

P - расстояние от начала координат до плоскости.

Шестое уравнение получается из первого умножением первого уравнения на коэффициент:

$$M = -\frac{SgnD}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Прямая в пространстве, четыре вида уравнений.

1. Параметрическое уравнение прямой: $\begin{matrix} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{matrix}$

2. Каноническое уравнение плоскости: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

где $M_0(x_0 y_0 z_0) \in P$; $\bar{l}(m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

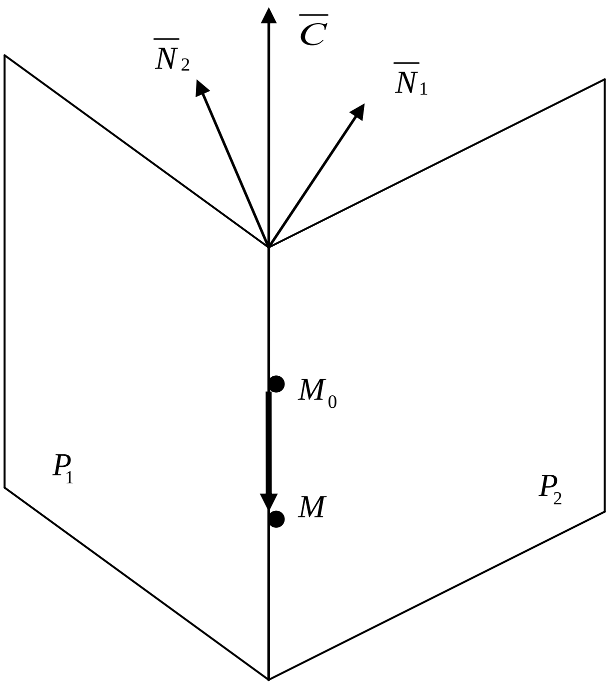
3. Уравнение прямой проходящей через две заданные точки.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

4. Уравнение прямой, образованное пересечением двух плоскостей:

Дано: $P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; $P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Решение.



$\overline{N_1}\left(A_1B_1C_1\right);\ \overrightarrow{N_2}\left(A_2B_2C_2\right)$

$$\vec{C}=\left[\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{N_2}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}$$

$M_0\left(x_0y_0z_0\right)$ – произвольная точка пересечения двух плоскостей с известными координатами. Для нахождения координат точки M_0, одна из координат даётся произвольной $z=z_0=0$, а остальные ищутся из совместного решения уравнений плоскости, если в них подставить $z=z_0=0$,т.е. из следующей системы:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y=-D_1\\ A_2x+B_2y=-D_2\end{cases}$$

$\overrightarrow{M_0M}\left(x-x_0,y-y_0,z-z_0\right)$. $\bar{l}\parallel\overrightarrow{M_0M}$ -значит, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_1}{\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}\quad(4)$$

Замечание: Уравнение (4) по сути является каноническим уравнением.

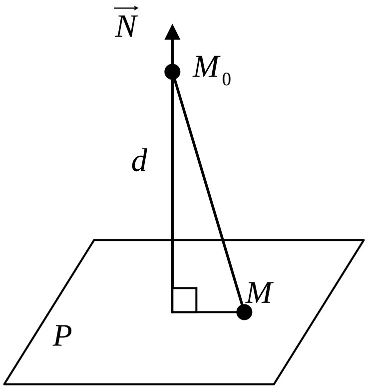
Пять задач на прямую и плоскость в пространстве.

1. Расстояние от заданной точки до плоскости.

Дано: $M_0\left(x_0 y_0 z_0\right)$; $P: Ax+By+Cz+D=0$

Найти: $d=?$.

Решение.



Выберем произвольную точку $M\left(x,y,z\right)\in P$

Замечание: Для нахождения координат точки M, две координаты задаются произвольно, обычно $x=y=0$, а третья определяется из уравнения $z=-\dfrac{D}{z}$.

$$M\left(0;0;-\frac{D}{c}\right)$$

$$d=\left|Пр_{\vec{N}}\overrightarrow{M_0M}\right|;\quad \overrightarrow{M_0M}\left(x-x_0;y-y_0;z-z_0\right)$$

$$d=\left|\frac{\left(\vec{N},\overrightarrow{M_0M}\right)}{\left|\vec{N}\right|}\right|;\quad d=\left|\frac{A\left(x-x_0\right)+B(y-y_0)+C(z-z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

2. Точка пересечения прямой и плоскости.

Дано: $L:\begin{array}{l} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{array}\quad (1);\quad P: Ax+By+Cz+D=0\quad (2)$

Найти: $M\left(x,y,z\right)=?$

Решение.

Подставляем уравнение (1) в уравнение (2): $A\left(x_0+mt\right)+B\left(y_0+nt\right)+C\left(z_0+pt\right)+D=0$.

Выразим параметр t из полученного уравнения: $Amt+Bnt+Cpt=-D-Ax_0-By_0-Cz_0\rightarrow$

$\rightarrow t=-\dfrac{D+Ax_0+By_0+Cz_0}{Am+Bn+Cp}$ - параметр точки пересечения прямой и плоскости.

Подставляем t в уравнение (1) и получим координаты точки M.

3. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

Дано: $L_1: \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$; $L_2: \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$

Найти: $\alpha = L_1, L_2 = ?$

Решение.

$e_1(m_1, n_1, p_1)\in L_1; \quad e_2(m_2, n_2, p_2)\in L_2$

$\alpha=\overline{e_1}\wedge\overline{e_2} \quad \cos\alpha=\dfrac{\overline{e_1},\overline{e_2}}{|\overline{e_1}||\overline{e_2}|}$; $\cos\alpha=\dfrac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}\sqrt{m_2{}^2+n_2{}^2+p_2{}^2}}$

Пусть $L_1\perp L_2\to\overline{e_1}\perp\overline{e_2} \quad (\overline{e_1}\overline{e_2})=0$

$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ -условие перпендикулярности прямых.

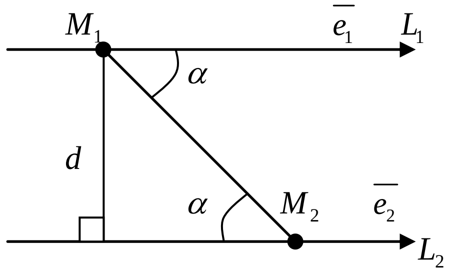
$L_1 || L_2\to\overline{e_1} || \overline{e_2}\to\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$ - условие параллельности.

4. Расстояние между параллельными прямыми.

Дано: $L: \dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$; $L_2: \dfrac{x-x_2}{km}=\dfrac{y-y_2}{kn}=\dfrac{z-z_2}{kp}$

Найти: $d=?$

Решение.



$\overline{e_1}(m,n,p)$; $M_1(x_1,y_1,z_1)$; $M_2(x_2,y_2,z_2)$

$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$; $d=|\overrightarrow{M_1M_2}|\sin\alpha$; $\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\overline{e_1}\right]\right|=\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\overline{e_1}\right]\right|\sin\alpha=d\,|\overline{e_1}|$;

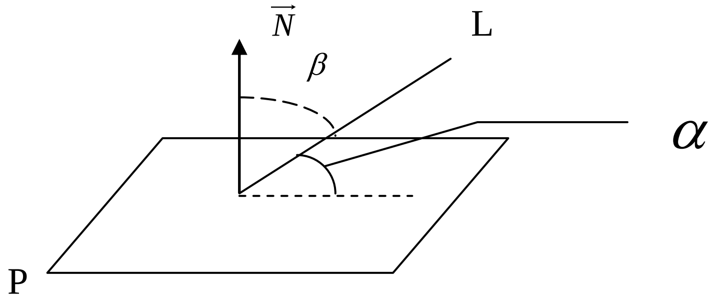
$$d=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\overline{e_1}\right]\right|}{|\overline{e_1}|},$$

где $\left[\overrightarrow{M_1M_2},\overline{e_1}\right]=\overline{c}(c_x,c_y,c_z)=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m & n & p\end{vmatrix}$;

$\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\overline{e_1}\right]\right|=\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}$; $|\overline{e_1}|=\sqrt{m^2+n^2+p^2}$

5. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Дано: $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p};\quad P:Ax+By+Cz+D=0$



Найти: $\alpha = L \wedge P = ?$

Решение.

$$\overline{N}(A,B,C),\quad \overline{e}(m,n,p)$$

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha;\quad \cos\beta=\frac{\left(\overline{N},\overline{e}\right)}{\left|\overline{N}\right|\left|\overline{e}\right|}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \to \quad \sin\alpha=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

Пусть: $L| \; |P \to \overline{e} \perp \overline{N}$

$\left(\overline{e},\overline{N}\right)=0 \;\; Am+Bn+Cp=0$ - условие параллельности прямой и плоскости.

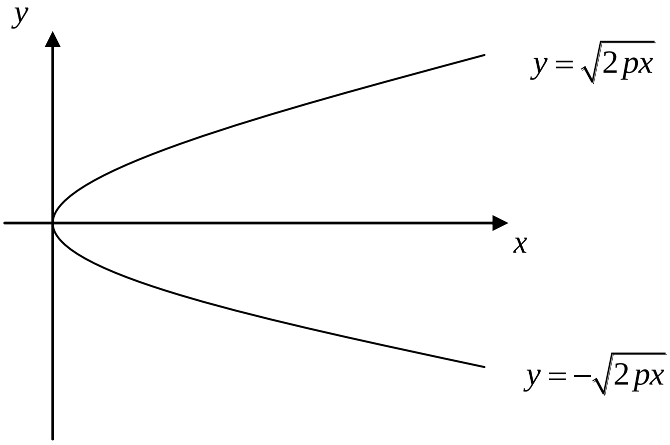
Пусть: $L \perp P \to \overline{e}| \; |\overline{N} \to$ координаты пропорциональны, значит:

$\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$ -условие перпендикулярности прямой и плоскости.

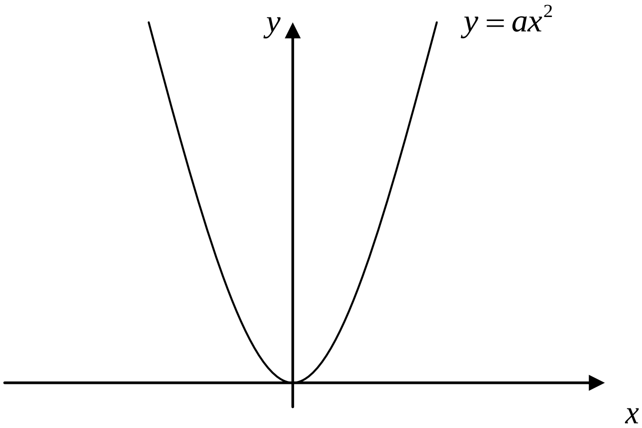
Линии 2-го порядка, каноническое уравнение параболы, эллипсы и гиперболы.

1. Парабола:

а) каноническое уравнение: $y^2 = 2px \quad (1)$



в) обыкновенное уравнение: $y = ax^2 \quad (2)$



Каноническое уравнение (1) получается из уравнения (2), если в уравнении (2) поменять местами координаты (x, y).

$$x = ay^2 \to y^2 = \frac{1}{a}x \to 2p = \frac{1}{a}$$

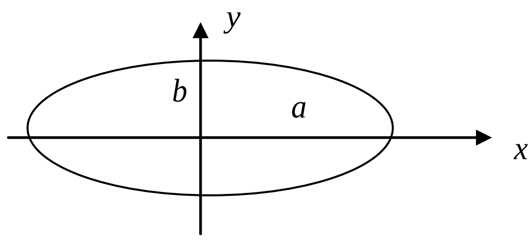
2. Эллипс

Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a, b-$ полуоси.

Замечание: Эллипс имеет две оси симметрии ($x, y-$ возводятся в квадрат), поэтому эллипс достаточно настроить в первой четверти, а в остальных четвертях достроить его из соображений симметрии.

$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$; $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

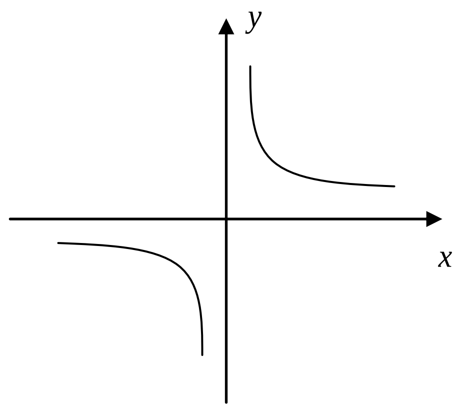
x	0	a	$\frac{a}{2}$
y	b	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}b$



Замечание: Если полуоси $a=b$, то получается частный случай эллипса – окружность.

3. Гипербола

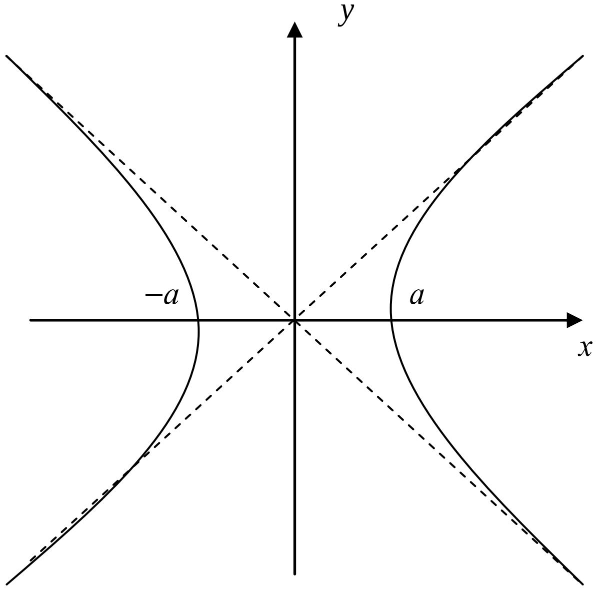
а) обычное уравнение: $y=\frac{1}{x}$



б) каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Замечание: Гипербола имеет две оси симметрии и в 1 четверти имеет следующее уравнение: $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

Гипербола располагается между прямыми $y = \pm\frac{b}{a}x$ (на рисунке эти прямые показаны пунктиром)



$x = 0, y = \frac{b}{a}\sqrt{-a^2} \rightarrow$ точек пересечения с осью y нет, $y = 0 \rightarrow x = a$

Покажем, что гипербола лежит ниже прямой $y = \frac{b}{a}x$, т.е., что y прямой большое ординаты гиперболы в 1 четверти при $x > 0$:

$$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{x}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) \rightarrow$$

умножим и разделим на сопряжённые скобки выражения:

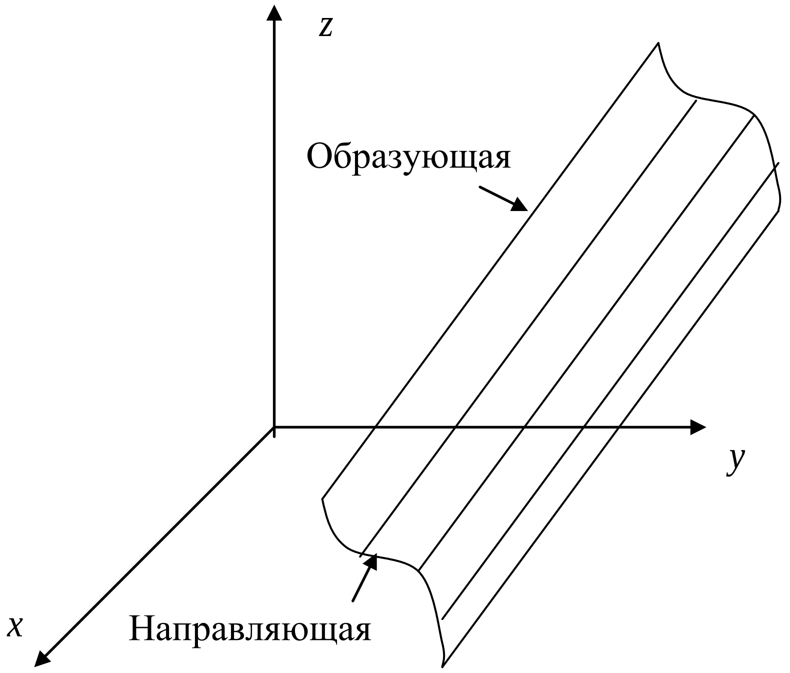
$$\rightarrow \frac{b}{a}\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{bx^2 - x^2 + a^2}{a\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} > 0$$

Поверхности второго порядка и их классификация. Цилиндрические поверхности.

Класс Поверхности	Вид поверхности	Каноническое уравнение
Цилиндрические поверхности	Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
	Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
	Параболический цилиндр	$y^2=2px$
Конусы	Эллиптический конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
Гиперболоиды	Однополостной гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
	Двуполостной гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
Эллипсоиды	Эллипсоиды	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Параболоиды	Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$
	Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$

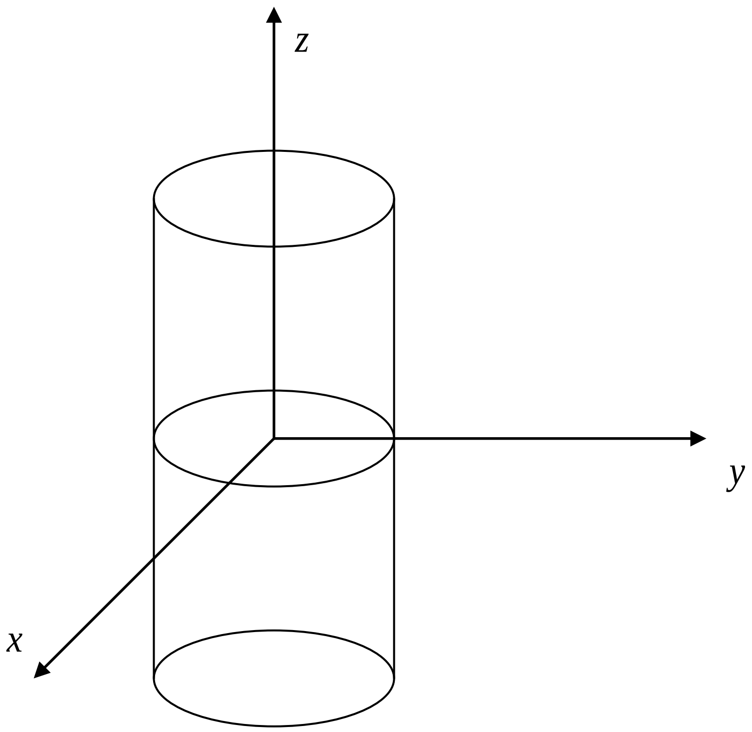
Цилиндрические поверхности.

Эти поверхности получаются движением прямой (образующей) по линии (направляющей)

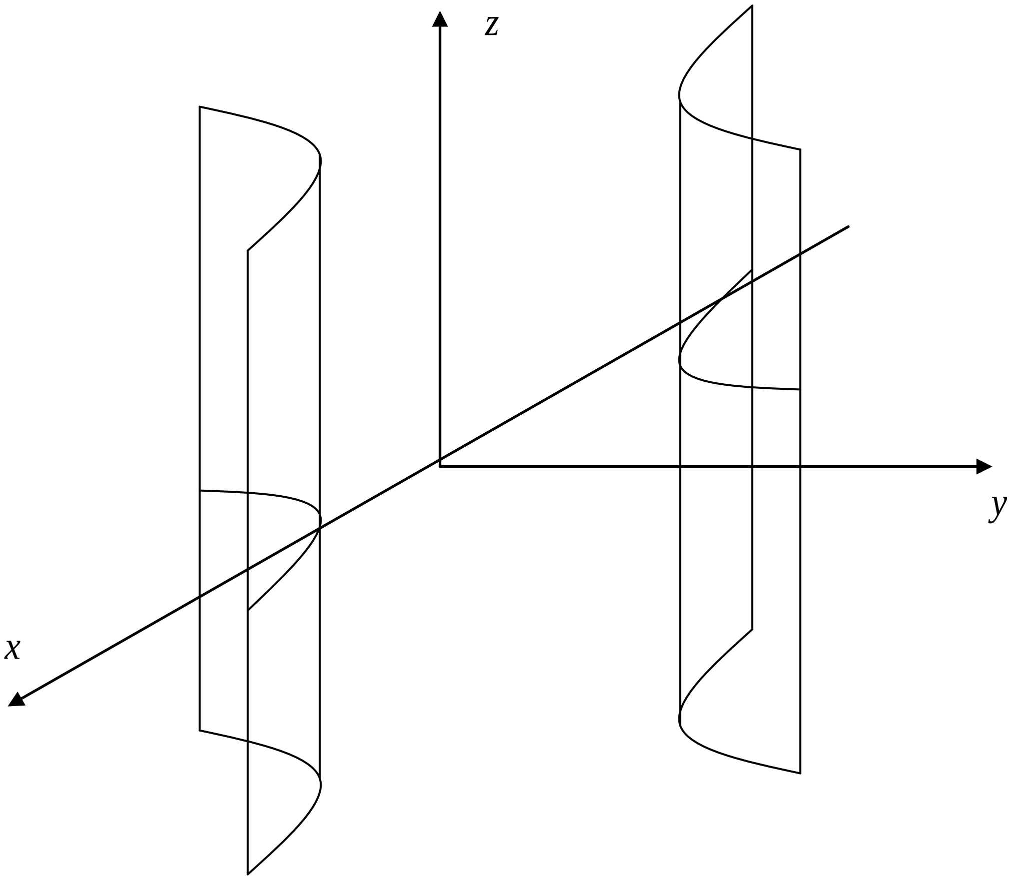


Замечание: название цилиндрической поверхности происходит от названия направляющей линии.

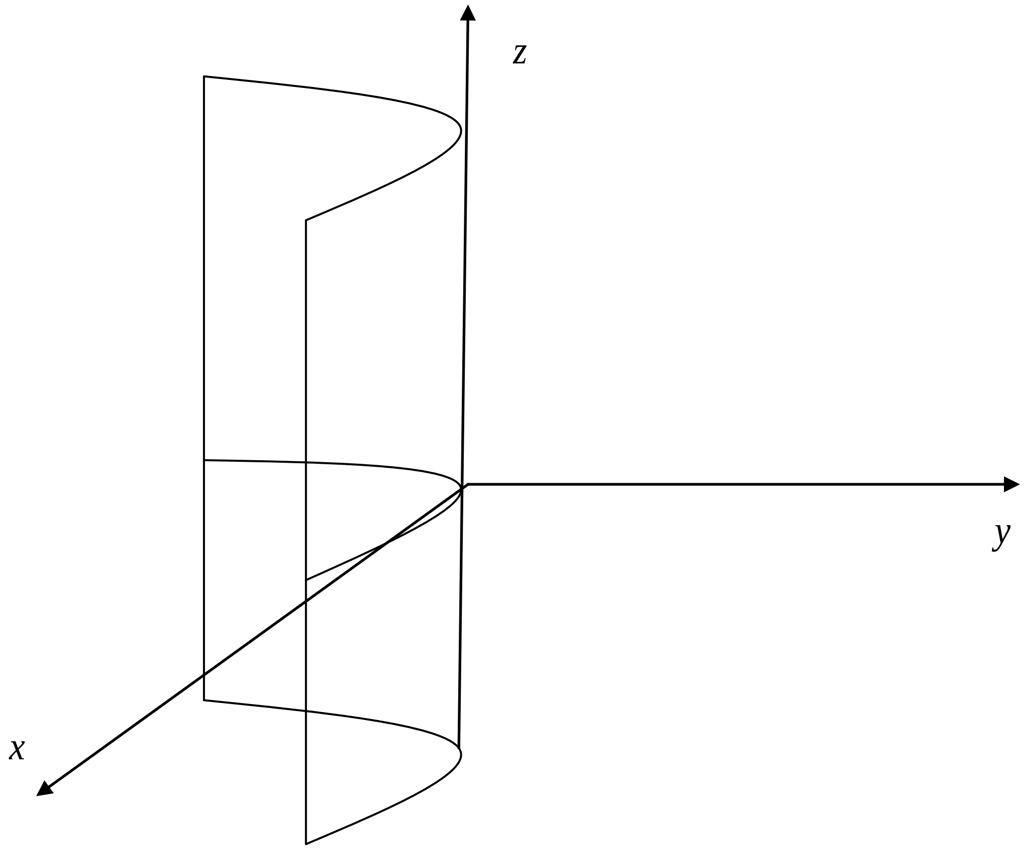
Прямой эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



Прямой гиперболический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Прямой параболический цилиндр: $y^2 = 2px$



Метод сечений для определения вида конуса и эллипсоида.

Суть метода сечений: Исследуемая поверхность рассекается плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Определяется вид линий, полученных в каждом из этих сечений. По виду линий строится искомая поверхность.

Эллиптический конус: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

1 сечение: $z=0 \to$ плоскость xoy; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \to x=y=0$

Замечание: Конус имеет вершину в начале координат.

$$z=z_0 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \,|: \to \frac{x^2}{\frac{a^2z_0^2}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2z_0^2}{c^2}}=1 \to \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1.$$

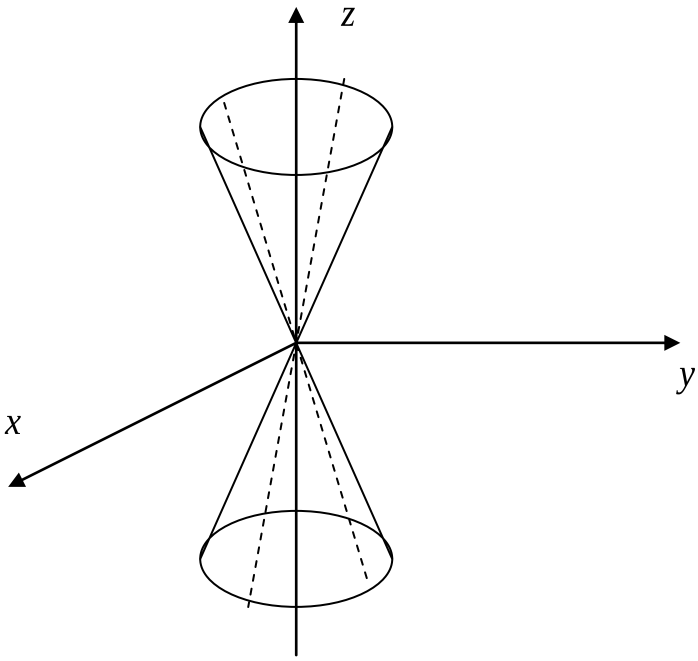
Вывод: в сечениях параллельных xoy получаются эллипсы.

2 сечение: $y=0 \to$ пл. $zox \to \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \to \frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2} \to z=\pm\frac{cx}{a}$

Вывод: в сечениях $||xoz$ получаются прямые.

3 сечение: $x=0$ пл. $yoz \to \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \to z=\pm\frac{cy}{b}$.

Вывод: в сечении $||yoz$ получаются прямые.

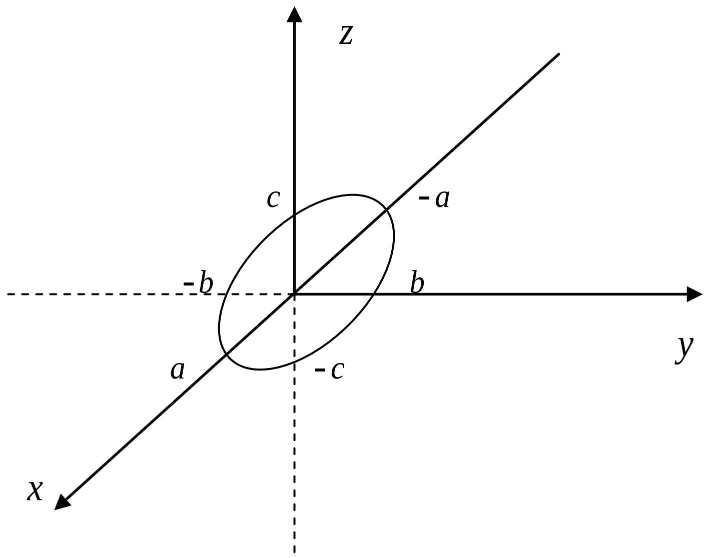


Эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

1 сечение: $z=0\rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - эллипс в плоскостях $||xoy$

2 сечение: $y=0\rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ - эллипс в плоскостях $||xoz$

3 сечение: $x=0\rightarrow\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ - эллипс в плоскостях $||yoz$



Метод сечений для определения вида гиперболоидов.

Суть метода сечений: Исследуемая поверхность рассекается плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Определяется вид линий, полученных в каждом из этих сечений. По виду линий строится искомая поверхность.

Однополостной гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

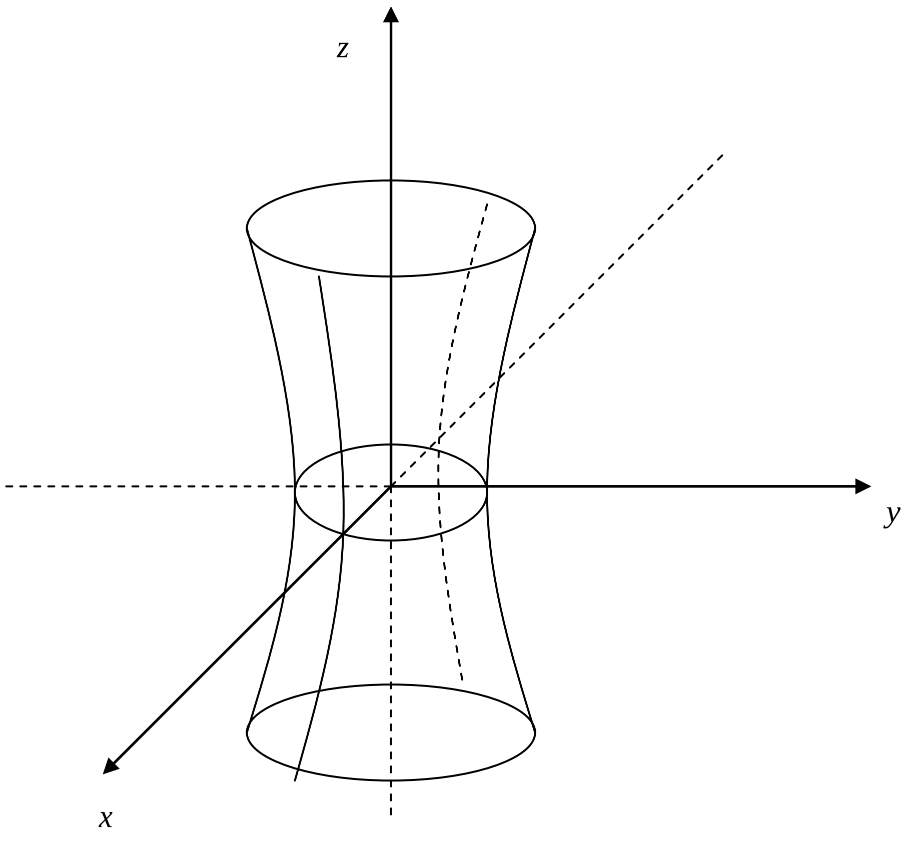
Определим область существования этого гиперболоида по оси z.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}\to z\in(-\infty;\infty)$$

1 сечение $z=0\to\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\to$эллипсы в плоскости параллельной xoy

2 сечение $y=0\to\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\to$гипербола в плоскости параллельной xoz и ветвями, пересекающими ось ox.

3 сечение $y=0\to\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\to$гипербола в плоскости параллельной xoz и ветвями, пересекающими ось oy.



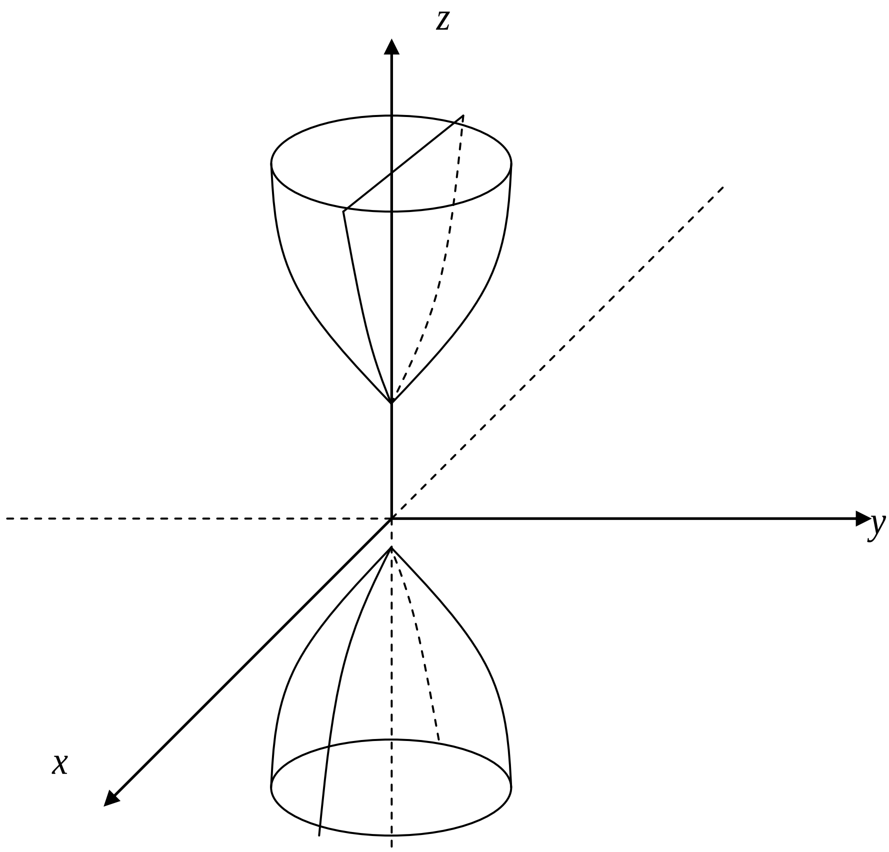
Двуполостной гиперболоид; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{z^2}{c^2} \to -1+\frac{z^2}{c^2}\ge 0 \to z^2 \ge c^2 \to |z|>c \to z\ge c, z\le -c$$

1 сечение $z=2c \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=3 \to \frac{x^2}{3a^2}+\frac{y^2}{3b^2}=1 \to$ эллипсы в плоскости параллельной xoy.

2 сечение $y=0 \to \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \to \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \to$ гиперболы в плоскости параллельной xoz с ветвями, пересекающими oz.

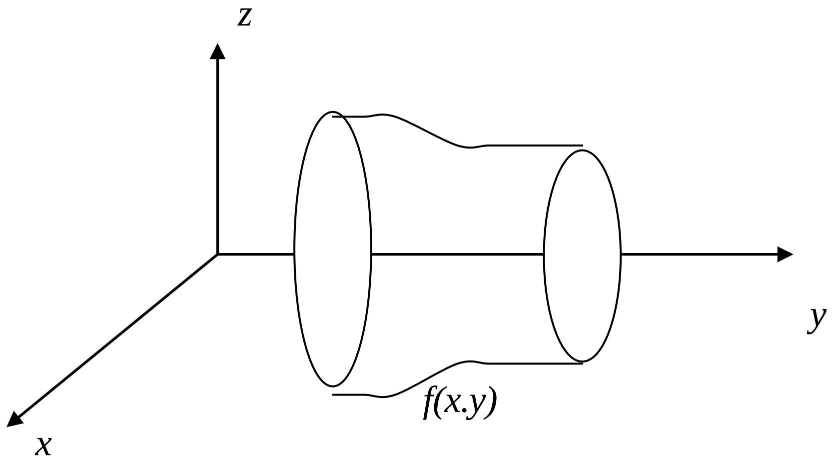
3 сечение $x=0 \to \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \to \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \to$ гиперболы в плоскости параллельной yoz с ветвями, пересекающими oz.



Поверхности вращения

Поверхности вращения образуются вращением кривых второго порядка вокруг какой-то оси координат.

Правило: Чтобы получить поверхность вращения необходимо в уравнение кривой координату оси вращения оставить без изменения, а вместо второй координаты подставить корень квадратный из суммы квадратов этой второй координаты и недостающей третьей координаты.



Например: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$ ось вращения $y \rightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1;$

Получили уравнение эллипсоида