ЛИТЕРАТУРА

1. Н.С. Пискунов Дифференциальное и интегральное исчисления, ч.1,2.-М.1978
2. Я.С. Бугров, С.М. Никольский Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М. 1980
3. Задачи и упражнения по математическому анализу./под ред. Б.П. Демидовича Ю – М. 1986

Условные обозначения

П - правило
О - определение
Т - теорема
С - следствие
З - замечание
В - вывод
$\exists$ - существует
$\forall$ - для любого
$\cap$ - пересечение
$\cup$ - объединение
$\in$ - принадлежит

Определители, их свойства и вычисления.

Определение: Определителем называется число, вычисленное определённым порядком по квадратной таблице чисел, составленной из n-строк и n-столбцов (n-порядок определителя).

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \left| \begin{matrix} a_{22} \\ (-a_{12}) \end{matrix} \right. \to a_{11}a_{22}x_1 - a_{21}a_{12}x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad \to \quad x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

a-коэффициент перед неизвестной.
b-свободный член.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

D-главный определитель, состоящий из коэффициентов перед неизвестными.

Правило: Определитель 2-го порядка вычисляется как разность произведений элементов главной и побочной диагонали.

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12} \qquad D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

Правило: Определитель для соответствующей строки составляется из главного определителя, заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов.

$$x_1 = \frac{D_{x1}}{D} \qquad x_i = \frac{D_{xj}}{D} \quad \left(j = \overline{1,n} \right).$$

Метод Саррусса (треугольника) для вычисления определителей 3-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \qquad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{32}a_{11} \quad (2)$$

Значение определителя вычисляется как сумма чисел 1, 2.

Вычисление определителя n - го порядка.

Определение: Минором элемента a_{ij} для определителя n - го порядка называется определитель $(n-1)$ порядка, полученный из исходного определителя вычёркиванием $\boldsymbol{i}$ -строки j -столбца.

Пример: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ $\text{для } a_{23} \to M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$

Определение: Алгебраическим дополнением элемента a_{il} называется число, вычисленное по формуле: $A_{ij} = (-1)^{i+l} M_{ij}$.

$A_{23} = (-1)^{2+3}(-6) = 6$

Определение: Определителем называется число равное сумме произведений элементов какой-то строки (столбца) на соответствующее этим элементам алгебраическое дополнение.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Замечание: Формулы вычисления и свойства определителя, сформулированные для строки, аналогичны и для столбца.

Свойства определителя:

1. Определитель не изменится, если в нём заменить строки на соответствующие столбцы.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

2. Определитель сменит знак, если поменять местами рядом стоящие строки.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -D$$

3. Определитель, имеющий две одинаковые строки равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0$$

4. Определитель, имеющий две пропорциональные строки равен 0.

$$a_{21} = ka_{11} \quad ; a_{22} = ka_{12}; \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12} - ka_{12}a_{11} = k\left(a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11}\right) = 0$$

$k = const$

5. Постоянный множитель какой-то строки можно выносить за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = kD = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 27 \end{vmatrix} = 2 \times 9 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 18.$$

6. Определитель, у которого какая-то строка состоит из одних нулей, равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$ (по 5 свойству при к = 0)

7. Если в определителе элементы какой-то строки представлены в виде суммы 2-х элементов, то такой определитель вычисляется через сумму 2-х определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left(a_{11} + b_{11}\right)a_{22} - \left(a_{12} + b_{12}\right)a_{21} =$$

$$= \left(a_{22}a_{21} - a_{12}a_{21}\right) + \left(b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{vmatrix}$$

8. Определитель не изменится, если к элементам какой-то строки прибавить элементы другой строки, умноженные на один и тот же коэффициент.

Замечание: Результат этого действия заносится в ту строку, к которой прибавляется.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a_{11}k & a_{22} + a_{12}k \end{vmatrix} \overset{7 св-во}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11}k & a_{12}k \end{vmatrix} = D + 0 = D$$

9. Сумма произведений элементов какой-то строки на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \to a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} = a_{11}\left(-a_{12}\right) + a_{12} \times a_{11} = 0$$

Пример:

Метод понижения порядка
(8 свойство)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{8\textit{свойство}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 9 \\ -1 & -5 & -6 \end{vmatrix} =$$

$1\textit{стр} + 3\textit{стр},$

$1\textit{стр} \times (-2) + 4\textit{стр}.$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -40 - (-6) = -34.$$

$1\textit{стр} \times (-4) + 2\textit{стр};$

$1\textit{стр} + 2\textit{стр}.$

Матрицы и их виды.

Определение: Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов (m, n –определяют размерность матрицы).

$$A = A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виды матриц:

1. Квадратная матрица: $m = n$.
2. Матрица строка: $A_n = \left(a_{11}a_{12}\dots a_{1n}\right)$.
3. Матрица столбец: $A_m = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.
4. Диагональная – называется квадратная матрица у которой отличны от нуля только элементы, расположенные на главной диагонали.
5. Единичная матрица – называется диагональная матрица, у которой на главной диагонали расположены одни единицы: $E_{nn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.
6. Ноль матрица: $0_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Действия над матрицами.

1. Равенство матриц – две матрицы одинаковой размерности равны, если равны их соответствующие элементы: $A_{mn} = B_{mn}$, если $a_{ij} = b_{ij}$
2. Транспортирование – матрица A^T является транспортированной по отношению к исходной матрице A, если строки первой матрицы являются столбцами другой матрицы и наоборот.

Например: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Умножение на константу – матрица $C_{mn} = KA_{mn}$, если $c_{ij} = Ka_{ij}$.
4. Сложение матриц – матрица $C_{mn} = A_{mn} + B_{mn}$, если $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
5. Умножение матриц – матрица $C_{mn} = A_{mu} B_{un}$, если $c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$.

Замечание: Перемножать можно такие матрицы, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Замечание: Размерность матрицы определяется числом строк первой матрицы и числом столбцов второй матрицы.

Замечание: Произведение двух матриц в общем случае не перестановочно (не коммутативно), т.е. $AB \neq BA$. В частном случае произведение двух матриц может быть перестановочно, если эти матрицы квадратные и имеют одинаковую размерность.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad AB = C_{22} \begin{pmatrix} 1\times 0 + 2(-1) + 3\times 5 & 1+8+18 \\ -2+15 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 27 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица.

Определение: Квадратная матрица A^{-1} называется обратной по отношению к исходной матрице A, если выполняется следующее неравенство: $A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Определение: Квадратная матрица называется невыраженной, если определитель составленный из этой матрицы не равен нулю.

Определение: Матрица A называется присоединённой по отношению к исходной матрице A, если она составлена из алгебраических дополнений транспортированной матрицы.

Пример: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Теорема: Любая невыраженная матрица имеет обратную, которая вычисляется по следующей формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}$.

Доказательство:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Замечание: На главной диагонали по определению расположены значения определителя.

Замечание: На побочной диагонали элементы равны нулю по 9 свойству определителей.

Ранг матрицы. Матричное способ решения системы уравнений и её совместность.

Определение: Рангом матрицы называется наивысший порядок определителя отличного от нуля, который можно составить из исходной матрицы RgA.

Матричный способ решения системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \qquad Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \rightarrow Ax = b;$ - матричное уравнение системы

Левую и правую часть матричного уравнения умножаем на обратную матрицу:

$$AA^{-1}x = A^{-1}B; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \; Ex = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad Ex = A^{-1}B \rightarrow x = A^{-1}B.$$

Определение: Система называется совместной, если она имеет одно или бесчисленное множество решений, и не совместной, если не имеет решений.

Определение: Матрица $\overline{A}$ называется расширенной, если к матрице A присоединить столбец свободных членов: $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$.

Условие совместности системы Кронекера - Капелле:

Определение: Система является совместной, если ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы $\overline{A}$: $RgA = Rg\overline{A}$.

Случаи решения системы уравнений:

1. Система имеет единственное решение, если $RgA = Rg\overline{A} = m = n$.
2. Система имеет лишние уравнения, если $RgA = Rg\overline{A} < m$, в этом случае отбрасываются любые уравнения $(m - RgA)$ и система приводится к 1-му случаю.
3. Система имеет бесчисленное множество решений, если $RgA = Rg\overline{A} < n$, в этом случае любые m неизвестные выражаются через остальные $(n - RgA)$ неизвестных.
4. Система решений не имеет, если $RgA \neq Rg\overline{A}$.

Замечание: Если совокупность (x_1; x_2; x_3) является решением системы линейных уравнений, а ($-x_1$; $-x_2$; $-x_3$) - не является, то такая система является **неоднородной.**

Определение: Совместная система линейных уравнений, содержащая **m** уравнений для **n>m** неизвестных, называется **неопределённой.**