

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н.С. Пискунов Дифференциальное и интегральное исчисления, ч.1,2.-М.1978
2. Я.С. Бугров, С.М. Никольский Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М. 1980
3. Задачи и упражнения по математическому анализу./под ред. Б.П. Демидовича Ю – М. 1986

## Условные обозначения

- П - правило
- О - определение
- Т - теорема
- С - следствие
- З - замечание
- В - вывод
- $\exists$  - существует
- $\forall$  - для любого
- $\cap$  - пересечение
- $\cup$  - объединение
- $\in$  - принадлежит

Определители, их свойства и вычисления.

Определение: Определителем называется число, вычисленное определённым порядком по квадратной таблице чисел, составленной из  $n$ -строк и  $n$ -столбцов ( $n$ -порядок определителя).

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \begin{vmatrix} a_{22} \\ -a_{12} \end{vmatrix} \rightarrow a_{11}a_{22}x_1 - a_{21}a_{12}x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \rightarrow x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$a$  - коэффициент перед неизвестной.

$b$  - свободный член.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$D$  - главный определитель, состоящий из коэффициентов перед неизвестными.

Правило: Определитель 2-го порядка вычисляется как разность произведений элементов главной и побочной диагонали.

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

Правило: Определитель для соответствующей строки составляется из главного определителя, заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов.

$$x_1 = \frac{D_{x1}}{D} \quad x_i = \frac{D_{xj}}{D} \quad (j = 1, n).$$

Метод Саррусса (треугольника) для вычисления определителей 3-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{32}a_{11} \quad (2)$$

Значение определителя вычисляется как сумма чисел 1, 2.

Вычисление определителя  $n$ -го порядка.

Определение: Минором элемента  $a_{ij}$  для определителя  $n$ -го порядка называется определитель  $(n-1)$  порядка, полученный из исходного определителя вычёркиванием  $i$ -строки  $j$ -столбца.

Пример:  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$  для  $a_{23} \rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$

Определение: Алгебраическим дополнением элемента  $a_{ij}$  называется число, вычисленное по формуле:  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

$$A_{23} = (-1)^{2+3} (-6) = 6$$

Определение: Определителем называется число равное сумме произведений элементов какой-то строки (столбца) на соответствующее этим элементам алгебраическое дополнение.

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

Замечание: Формулы вычисления и свойства определителя, сформулированные для строки, аналогичны и для столбца.

Свойства определителя:

1. Определитель не изменится, если в нём заменить строки на соответствующие столбцы.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = D \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} .$$

2. Определитель сменит знак, если поменять местами рядом стоящие строки.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22} = -D$$

3. Определитель, имеющий две одинаковые строки равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} a_{12} - a_{12} a_{11} = 0$$

4. Определитель, имеющий две пропорциональные строки равен 0.

$$a_{21} = ka_{11} ; a_{22} = ka_{12}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12} - ka_{12}a_{11} = k(a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11}) = 0$$

$$k = const$$

5. Постоянный множитель какой-то строки можно выносить за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = kD = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 27 \end{vmatrix} = 2 \times 9 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 18.$$

6. Определитель, у которого какая-то строка состоит из одних нулей, равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{по 5 свойству при } k = 0)$$

7. Если в определителе элементы какой-то строки представлены в виде суммы 2-х элементов, то такой определитель вычисляется через сумму 2-х определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + b_{11})a_{22} - (a_{12} + b_{12})a_{21} =$$

$$= (a_{22}a_{21} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

8. Определитель не изменится, если к элементам какой-то строки прибавить элементы другой строки, умноженные на один и тот же коэффициент.

Замечание: Результат этого действия заносится в ту строку, к которой прибавляется.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a_{11}k & a_{22} + a_{12}k \end{vmatrix} \stackrel{7 \text{ сс-60}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11}k & a_{12}k \end{vmatrix} = D + 0 = D$$

9. Сумма произведений элементов какой-то строки на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \rightarrow a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} = a_{11}(-a_{12}) + a_{12} \times a_{11} = 0$$

Пример:

Метод понижения порядка  
(8 свойство)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{8 свойство}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 9 \\ -1 & -5 & -6 \end{vmatrix} =$$

$1\text{стр} + 3\text{стр},$

$1\text{стр} \times (-2) + 4\text{стр}.$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -40 - (-6) = -34.$$

$1\text{стр} \times (-4) + 2\text{стр};$

$1\text{стр} + 2\text{стр}.$

Матрицы и их виды.

Определение: Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов ( $m, n$  – определяют размерность матрицы).

$$A = A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виды матриц:

1. Квадратная матрица:  $m = n$ .

2. Матрица строка:  $A_n = (a_{11} a_{12} \dots a_{1n})$ .

3. Матрица столбец:  $A_m = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ .

4. Диагональная – называется квадратная матрица у которой отличны от нуля только элементы, расположенные на главной диагонали.

5. Единичная матрица – называется диагональная матрица, у которой на главной

диагонали расположены одни единицы:  $E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .

6. Ноль матрица:  $0_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .

Действия над матрицами.

1. Равенство матриц – две матрицы одинаковой размерности равны, если равны их соответствующие элементы:  $A_{mn} = B_{mn}$ , если  $a_{ij} = b_{ij}$
2. Транспортирование – матрица  $A^T$  является транспонированной по отношению к исходной матрице  $A$ , если строки первой матрицы являются столбцами другой матрицы и наоборот.

Например:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$       $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

3. Умножение на константу – матрица  $C_{mn} = KA_{mn}$ , если  $c_{ij} = Ka_{ij}$ .
4. Сложение матриц – матрица  $C_{mn} = A_{mn} + B_{mn}$ , если  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .
5. Умножение матриц – матрица  $C_{mn} = A_{mi}B_{in}$ , если  $c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik}b_{kj}$ .

Замечание: Перемножать можно такие матрицы, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Замечание: Размерность матрицы определяется числом строк первой матрицы и числом столбцов второй матрицы.

Замечание: Произведение двух матриц в общем случае не перестановочно (не коммутативно), т.е.  $AB \neq BA$ . В частном случае произведение двух матриц может быть перестановочно, если эти матрицы квадратные и имеют одинаковую размерность.

Пример:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ ;  $AB = C_{22} \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2(-1) + 3 \times 5 & 1 + 8 + 18 \\ -2 + 15 & 4 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 27 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}$ .

Обратная матрица.

Определение: Квадратная матрица  $A^{-1}$  называется обратной по отношению к исходной матрице  $A$ , если выполняется следующее неравенство:  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$

Определение: Квадратная матрица называется невыраженной, если определитель составленный из этой матрицы не равен нулю.

Определение: Матрица  $A$  называется присоединённой по отношению к исходной матрице  $A$ , если она составлена из алгебраических дополнений транспонированной матрицы.

Пример:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$

Теорема: Любая невыраженная матрица имеет обратную, которая вычисляется по следующей формуле:  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$

Доказательство:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Замечание: На главной диагонали по определению расположены значения определителя.

Замечание: На побочной диагонали элементы равны нулю по 9 свойству определителей.



Ранг матрицы. Матричный способ решения системы уравнений и её совместность.

Определение: Рангом матрицы называется наивысший порядок определителя отличного от нуля, который можно составить из исходной матрицы  $RgA$ .

Матричный способ решения системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \rightarrow Ax = b; \quad - \text{ матричное уравнение системы}$$

Левую и правую часть матричного уравнения умножаем на обратную матрицу:

$$AA^{-1}x = A^{-1}B; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad Ex = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad Ex = A^{-1}B \rightarrow x = A^{-1}B.$$

Определение: Система называется совместной, если она имеет одно или бесчисленное множество решений, и не совместной, если не имеет решений.

Определение: Матрица  $\bar{A}$  называется расширенной, если к матрице  $A$  присоединить

$$\text{столбец свободных членов: } \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}.$$

Условие совместности системы Кронекера - Капелле:

Определение: Система является совместной, если ранг матрицы  $A$  равен рангу расширенной матрицы  $\bar{A}$ :  $RgA = Rg\bar{A}$ .

Случаи решения системы уравнений:

1. Система имеет единственное решение, если  $RgA = Rg\bar{A} = m = n$ .
2. Система имеет лишние уравнения, если  $RgA = Rg\bar{A} < m$ , в этом случае отбрасываются любые уравнения  $(m - RgA)$  и система приводится к 1-му случаю.
3. Система имеет бесчисленное множество решений, если  $RgA = Rg\bar{A} < n$ , в этом случае любые  $m$  неизвестные выражаются через остальные  $(n - RgA)$  неизвестных.
4. Система решений не имеет, если  $RgA \neq Rg\bar{A}$ .