Криволинейные интегралы 1 рода

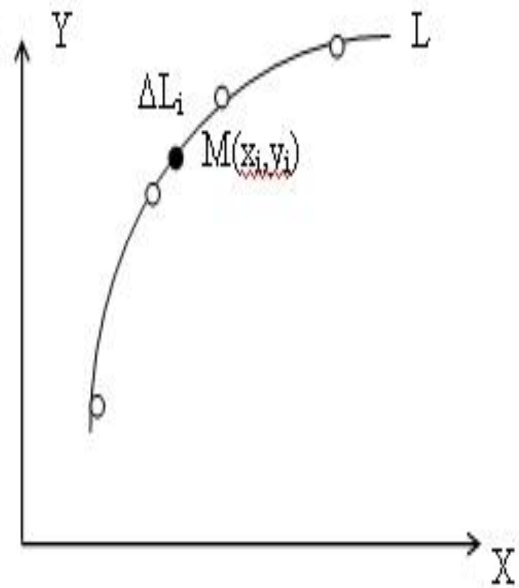
Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Понятие криволинейного интеграла 1 рода и его свойства.
Вычисление криволинейного интеграла 1 рода в декартовой и полярной системах координат, а также в параметрической форме.

Понятие криволинейного интеграла 1 рода и его свойства.
(для задачи нахождение массы криволинейного стержня)

Дано: стержень в виде дуги L, в каждой точке которого задана плотность $f(x,y)$.
Найти: массу криволинейного стержня M.



Решение: Разобьем дугу L на n частей длинной ΔL_i и выберем внутри каждой части произвольную точку $M(x_i,y_i)$. Будем считать на каждом участке ΔL_i плотность постоянной и равной значению плотности в точке $M(x_i,y_i)$, т.е. равной $f(x_i,y_i)$. Масса каждого участка равна произведению плотности на длину дуги: $m_i \approx f(x_i,y_i)\times \Delta L_i$.

Масса всего стержня: $M_i \approx \sum f(x_i,y_i)\times \Delta L_i$. (1)

Переходя к пределу, получим точное значение массы стержня: $M = \lim\limits_{n\to\infty} \sum f(x_i,y_i)\times \Delta L_i$.

Определение: Криволинейным интегралом 1 рода называется предел интегральной суммы (1), если это предел не зависит от способа разбиение на участки и выбора точки внутри каждого участка.

Обозначение: $M = \int\limits_L f(x,y)\, dL = \lim\limits_{n\to\infty} \sum f(x_i,y_i)\times \Delta L_i$.

Свойства

1. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла:

$$\int\limits_L C\, f(x,y)\, dL = C \int\limits_L f(x,y)\, dL$$

2. Криволинейный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от каждой их этих функций:

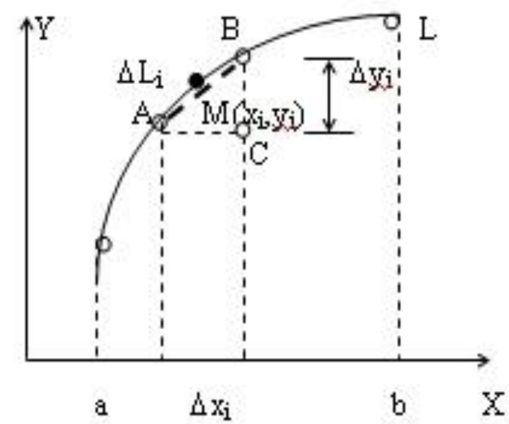
$$\int\limits_L [f_1(x,y) + f_2(x,y)]\, dL = \int\limits_L f_1(x,y)\, dL + \int\limits_L f_2(x,y)\, dL$$

3. Дугу можно разбивать на отдельные части и криволинейный интеграл по всей дуге равен сумме интегралов по каждой их этих частей:

$$\int\limits_L f(x,y)\, dL = \int\limits_{L_1} f(x,y)\, dL + \int\limits_{L_2} f(x,y)\, dL$$

Вычисление криволинейного интеграла 1 рода.

1. В декартовой системе координат.



Дано: L: $y = y(x)$, $x \in [a,b]$.

Решение: Разобьем дугу L на n частей длинной ΔL_i и выберем внутри каждой части произвольную точку $M(x_i,y_i)$. На каждом участке ΔL_i заменим длину на отрезок AB равный, как гипотенуза треугольника ABC, $\sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + \Delta y_i^{\,2}} = \Delta x_i \sqrt{1 + (\Delta y_i / \Delta x_i)^2} \approx \Delta L_i$.

Используем теорему Лагранжа: $\Delta y_i = y'(x_i)\, \Delta x_i$

$\Delta L_i \approx \Delta x_i \sqrt{1 + (y'(x_i))^2}$.

$$\int\limits_L f(x,y)\, dL = \lim_{n\to\infty} \sum f(x_i,y_i) \times \Delta L_i = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i,y_i) \sqrt{1 + (y'(x_i))^2}\, \Delta x_i}_{\text{Определенный интеграл на отрезке } [a,b].}$$

$$\boldsymbol{\int\limits_L f(x,y)\, dL = \int\limits_a^b f(x,y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx}$$

Замечание: вместо y подставляется уравнение линии L: $y(x)$.

2. В параметрической форме.

В параметрической форме производная $y'(x)$ вычисляется по формуле: $y'(x) = y'(t) \,/\, x'(t)$,

дифференциал $dx = x'(t)\,dt$ и, как при замене переменных, меняются пределы интегрирования $a = x(t_н)$, $b = x(t_к)$.

$$\int_L f(x,y)\,dL = \int_a^b f(x,y)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \int_{t_н}^{t_к} f(x,y(t))\sqrt{1 + (y'(t) \,/\, x'(t))^2}\;x'(t)\,dt.$$

$$\int_L f(x,y)\,dL = \int_{t_н}^{t_к} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\;dt.$$

Замечание: вместо **x, y** подставляется параметрические уравнения линии L: y(t) и x(t).

3. В полярной системе координат.

Связь полярной и декартовой систем координат записывается в виде: $x = r\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, где $r = r(\varphi)$. Тогда x и y можно рассматривать как параметрическое задание функции $x=x(\varphi), y=y(\varphi)$ с параметром φ.

$x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi,\qquad y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi.$

$$(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2 = (r'(\varphi))^2\cos^2\varphi - 2r'(\varphi)\cos\varphi\, r(\varphi)\sin\varphi + (r(\varphi))^2\sin^2\varphi +$$
$$+ (r'(\varphi))^2\sin^2\varphi + 2r'(\varphi)\cos\varphi\, r(\varphi)\sin\varphi + (r(\varphi))^2\cos^2\varphi = (r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2.$$

В параметрической форме относительной аргумента φ:

$$\int_L f(x,y)\,dL = \int_{\varphi_н}^{\varphi_в} f(x(\varphi),y(\varphi))\sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Подставляя $(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2$, получим:

$$\int_L f(x,y)\,dL = \int_{\varphi_н}^{\varphi_в} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Замечание: **r (φ)** - уравнение линии L.