Функциональные ряды

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Понятие функционального ряда. Мажорируемый ряд.

Свойства функциональных рядов

Понятие степенного ряда, признак его сходимости. Теорема Абеля.

Радиус сходимости степенного ряда.

Свойства сходящихся степенных рядов.

Разложение функции в степенной ряд: необходимое условие и вид разложения.

Достаточные признаки разложения функции в ряд Тейлора.

Разложение функций вряд Маклорена.

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Понятие ряда Фурье и определение его коэффициентов.

Необходимое условие разложения функции в ряд Фурье.

Ряд Фурье для чётных и нечётных функций.

Ряд Фурье для функции с произвольным периодом и на произвольном отрезке.

Понятие функционального ряда. Мажорируемый ряд.

Определение: Функциональным рядом называют такой ряд, у которого каждый его член является функцией одного переменного.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Замечание: При каждом значении x функциональный ряд преобразуется в числовой.

Определение: Значение x, при котором получается сходящийся числовой ряд называется точкой сходимости функционального ряда.

Например: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{n^2}$ $\quad x = 1 \rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – ряд Дирихле для случае степени больше значения 2 - сходится $\rightarrow x = 0$ точка сходимости.

Определение: Совокупность точек сходимости образуют область сходимости функционального ряда.

Например: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Сравним этот ряд с РГП. $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n \to a_1 = 1; q = x$ РГП - сходится, если $|q| < 1 \Rightarrow |x| < 1$

$\to -1 < x < 1 \to x \in (-1;1) -$ область сходимости.

Для РГП известна его сумма $S = \dfrac{a_1}{1-q} \to$

$S = \dfrac{1}{1-x} \to$ сумма функционального ряда является функцией аргумента x.

Обозначим: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ - сумма ряда,

$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ - частичная сумма функционального ряда

$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ - остаток функционального ряда

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x) \quad (1)$$

Пусть функциональный ряд сходится в некоторой области

$$\to \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), .$$

Вычислим предел левой и правой части (1).

$$\lim_{n\to\infty} S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) + \lim_{n\to\infty} r_n(x) \qquad S(x) = S_n(x) + \lim_{n\to\infty} r_n(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

Вывод: В области сходимости функционального ряда предел его остатка равен нулю.

Мажорируемый ряд.

Определение: Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется мажорируемый в некоторой области D, если для него можно подобрать числовой знакоположительный сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (мажорант), такой, что для этих рядов выполняется следующее условие $|f_n(x)| \le a_n \, (\forall n \in N, \forall x \in D)$.

Например: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{n^2}$ (2)

Составим ряд из модуля $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos \pi x|}{n^2}$ (3)

Подберём мажорант: $\frac{|\cos \pi x|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходящийся

По признаку сравнения сходится (3) ряд. По достаточному признаку абсолютной сходимости сходится абсолютно второй ряд.

Вывод: Всякий мажорируемый в некоторой области функциональный ряд является абсолютно сходящимся в этой области.

Свойства функциональных рядов

1-е свойство: равномерная сходимость.

Теорема: Если функциональный ряд является мажорируемым на $[a;b]$, то

$\forall \varepsilon_n > 0 \; \exists M > 0$, такое, что $\forall n > M$ выполняется следующее неравенство:

$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon_n$

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (1) \quad \text{- мажорируемый} \quad \rightarrow S(x) = S_n(x) + r_n(x) \rightarrow S(x) - S_n(x) = r_n(x) \rightarrow$$

$$\rightarrow |S(x) - S_n(x)| = |r_n(x)| \quad (2); \; r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \quad (3).$$

Для ряда (1) известен мажорант: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (4) $\rightarrow$ остаточный член ряда. $\varepsilon_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ (5);

$\varepsilon_k \rightarrow 0$ т.к. (4) ряд сходится; $\varepsilon_k > 0$ т.к. (4) ряд – знакоположительный.

(1) и (4) ряды связаны по определению мажорируемости следующим неравенством:

$$|f_n(x)| < a_n \quad (6) \quad \forall n \in N.$$

Составим соотношение (6) для $n+1, n+2, \infty$ членов ряда:

$$\begin{cases} |f_{n+1}(x)| < a_{n+1} \\ |f_{n+2}(x)| < a_{n+2} \rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| < \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \varepsilon_k \left(из (5)\right) \rightarrow \varepsilon_n > \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| > \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| = |r_k(x)|; \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

$$|r_k(x)| < \varepsilon_k \quad (7).$$

Подставляем (7) в (2): $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon_n$, ч.т.д.

Определение: Функциональный ряд, для которого справедлива доказанная теорема, называется равномерно сходящимся.

Второе свойство: непрерывность суммы.

Сумма мажорируемого на $[a, в]$ функционального ряда, составленного из непрерывных функций является непрерывной функцией.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Если $f_n(x)-$ непрерывная функция $\rightarrow S(x)-$ непрерывная.

3-е свойство: интегрирование суммы функционального ряда.

Интеграл от суммы мажорируемого на отрезке $[a,b]$ функционального ряда равен сумме интегралов вычисленных от каждого члена этого ряда.

Доказательство:

$$\int_\alpha^x S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\alpha^x f_n(t)\,dt \quad (1), \quad \alpha, x \in [a,b]$$

Требуется доказать, что ряд, составленный из интегралов, стоящий в правой части сходится.

$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \to S(t) = S_n(t) + r_n(t) \quad (2).$ Интегрируем левую и правую часть формулы (2):

$$\underbrace{\int_\alpha^x S(t)dt}_{S^*(x)} = \underbrace{\int_\alpha^x S_n(t)dt}_{S_n^*(x)} + \underbrace{\int_\alpha^x r_n(t)dt}_{r_n^*(x)}$$

$S^*(x)$- сумма ряда составленного из интеграла.

$S_b^*(x)$- частная сумма этого интеграла.

$r_n^*(x)$- остаток этого ряда.

$$|r_n^*(x)| = \left|\int_\alpha^x r_n(t)\,dt\right| \le \pm\int_\alpha^x |r_n(t)|\,dt \to |r^*(x)| < \pm\varepsilon_n \int_\alpha^x dt = \pm\varepsilon_n t\,\Big|_\alpha^x = \pm\varepsilon_n(x-\alpha), \quad \begin{matrix} +\text{если } x > \alpha \\ -\text{если } x < \alpha \end{matrix}.$$

Из первого свойства известно: $|r_n(t)| < \varepsilon_n$

$$x - \alpha < b - a \to |r_n^*(x)| < \varepsilon_n(b-a) \to |r_n^*(x)| \to 0, \text{т.к.} \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Остаток ряда, составленный из интеграла, *стремиться к* $0 \to$ этот ряд сходится, значит, формула верна.

Пример:

$$\int_0^{\pi/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos nt}{n^2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n^2\cdot n}\Bigg|_0^{\pi/2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n^3}=1-\frac{1}{27}-\frac{1}{125}-\frac{1}{343}-\frac{1}{729}-\underbrace{\frac{1}{1331}}_{<\varepsilon}=0,969$$

$\varepsilon = 0.001 -$ *точность.*

<u>Четвёртое свойство: дифференцирование сумма ряда.</u>

Производная от суммы мажорируемого на $[a,в]$ функционального ряда равна сумме производных вычисленных от каждого члена этого ряда

Доказательство:

$$S'(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t) \quad (1); \qquad S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x\in[a,в] \ (2)$$

Зададим: $x=\alpha\in[a,в]-\mathrm{const}\to S(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha)$ (3), $\forall\alpha\in[a,в]$

Используем третье свойство, интегрируем левую и правую часть формулы (1):

$$\int_{\alpha}^{x} S'(t)dt=\int_{t}^{x}\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{x} f_n'(t)dt; \qquad dS(t)=S'(t)dt;\ df_n(t)=f_n'(t)dt\to$$

$$\int_{\alpha}^{x} dS(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{x} df_n(t)\to S(t)\Big|_{\alpha}^{x}=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\Big|_{\alpha}^{x}\to \qquad S(x)-S(\alpha)=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}_{формула(1)}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha)}_{формула(3)}\to$$

$$\to S(x)-S(\alpha)\equiv S(x)-S(\alpha)$$

Получили тождество, значит формула (1) верна.

Понятие степенного ряда, признак его сходимости. Теорема Абеля.

Определение: Степенным называется такой функциональный ряд, у которого каждый его член является степенной функцией.

Виды записи степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (a_n, x_0 - const);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Теорема Абеля.

Если степенной ряд сходится в точке, $|x| = |x_0|$, то этот ряд сходится в интервале $|x| < |x_0|$.

Если степенной ряд расходится в точке, $|x| = |x^*|$, то он расходится в интервале $|x| > |x^*|$.

Доказательство:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (1) составим из 1-го ряда, ряд из модулей.

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ (2) получим из 2-го ряда сходящийся знакоположительный числовой ряд.

Подставим в (2) $x = x_0$: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ (3) - сходится по условию теоремы.

Используем необходимый признак сходимости для 3-го ряда.

$\lim_{n\to\infty} |a_n x_0^n| = 0 \rightarrow$ используем определение предела $|a_n x_0^n - 0| < \varepsilon(\varepsilon > 0) \rightarrow |a_n x_0^n| < \varepsilon$ (4).

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x^n \frac{x_0^n}{x_0^k} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|a_n x_0^n|}_{<\varepsilon \text{ из } (4)} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \qquad (5)..$$

Сравним полученный ряд с Р.Г.П. : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \rightarrow a_1 = \varepsilon$; $q = \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$.

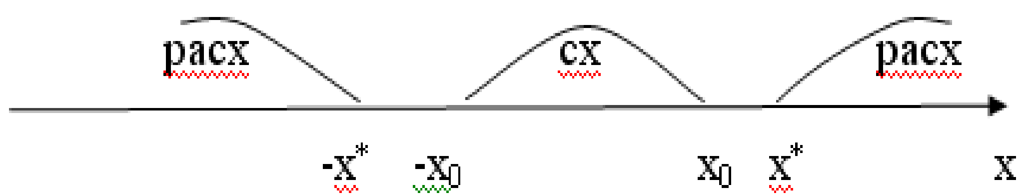
Р.Г.П. сходится, если $|q| < 1 \rightarrow \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1 \rightarrow |x| < |x_0|$

5-й ряд сходится при $|x| < |x_0|$. 2-й ряд меньше 5-го, значит, по признаку сравнения 2-й ряд сходится при $|x| < |x_0|$.

По достаточному признаку абсолютной сходимости, если ряд из модулей (2) сходится, то сходится исходный ряд (1) при $|x| < |x_0|$.

Пусть $|x| = |x^*|$ - ряд расходится. Используем метод от противного, т.е. предполагаем, что при $|x| = |x^*|$ - ряд сходится,

$\to |x^*| < |x| - сх. \to |x^*| = |x| - сходится.$ Получим противоречие условию, $|x| = |x^*|$ значит ряд расходится при $|x| > |x^*|$.



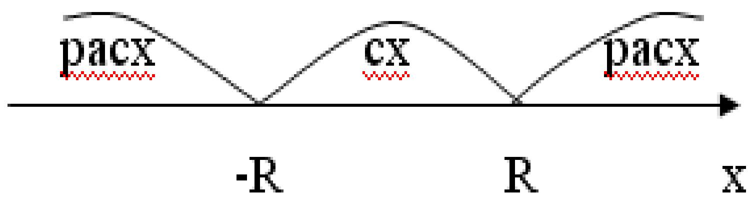
Радиус сходимости степенного ряда.

Определение: Радиусом сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется точка $x = R$ ($R>0$), отделяющая интервалы сходимости и расходимости.

Из теоремы Абеля $x_0 = R$, $x^* = R$

Когда точки совпадают, получаются два интервала

$\rightarrow |x| < R \rightarrow -R < x < R$ - область абсолютной сходимости..



Вычисление радиуса сходимости по формуле Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|<1-\text{ряд сходится}\to |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1\to |x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;\ |x|<R\to$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}\quad (1)$$

Вычисление радиуса сходимости по формуле Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}<1-\ \text{ряд сходится}\qquad |x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1\to |x|<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\to$$

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\quad (2)$$

Замечание: Формула (1,2) применяется, если в степенном ряде в степени n располагается подряд, т.е. $n=1,2,3\ldots$ В противном случае для каждой конкретной задачи необходимо выводить свою формулу радиуса сходимости.

Пример: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}n^2}{(n+1)^2 x^{2n}}\right| < 1 \to x^2 \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}}_{1} < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \to |x| < 1 \to \ \to R = 1 \Rightarrow x \in (-1;1)$$

Исследуем поведение ряда на границах интервала сходимости.

$x = \pm 1 \qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{2n}}{n^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – ряд Дирихле – сходится.

Ответ: $x = [-1;1]$ – область абсолютной сходимости.

Свойства сходящихся степенных рядов.

1. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией.

Это является следствием 2-го свойства функциональных рядов, т.к. степенной ряд составлен из непрерывных степенных функций.

2. Степенной ряд можно неограниченное число раз дифференцировать и интегрировать.

   Это является следствием 3 и 4 свойств функционального ряда т.к. производная и интеграл от степенной функции остаётся степенной функцией.

3. В степенном ряде можно вычитать или прибавлять конечное число слагаемых.

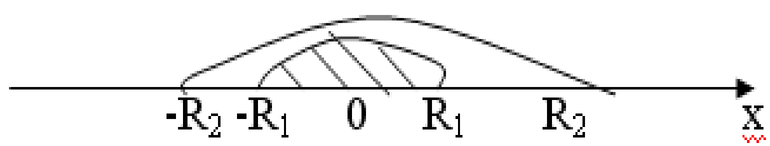
Это является следствием 1-го свойства числовых рядов.

Замечание: 1-3 свойства справедливы в области сходимости степенного ряда.

4. Сумма и произведение 2-х степенных рядов является сходящимся степенным рядом на пересечении областей сходимости 2-х степенных рядов.

1 ряд $x \in (-R_1, R_1)$

2 ряд $x \in (-R_2, R_2)$



Разложение функции в степенной ряд: необходимое условие и вид разложения.

Определение: Разложением функции в степенной ряд называется представление этой функции в виде ряда.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad f(x)=S(x) \quad (1)$$

Необходимое условие.

Теорема: Если функция разложима в степенной ряд, то она бесконечное число раз дифференцируема.

Это является вторым следствием степенных ряда, так как выполняется равенство (1).

Вид разложения.

Теорема: Если функция разложима в степенной ряд $\forall x \in 0_\delta(x_0)$, то это разложение имеет следующий вид:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Доказательство:

$$S(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

$$x = x_0 \rightarrow f(x_0) = S(x_0) = a_0 \rightarrow a_0 = f(x_0)$$

$$f'(x) = S'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots \qquad \rightarrow f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = S''(x) + 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)(x - x_0)^{n-2}a_n + \ldots$$

$$\rightarrow f''(x_0) = 2!a_2 \qquad \rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$f'''(x) = S'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)(x - x_0)^{n-2}a_n + \ldots$$

$$\rightarrow f'''(x_0) = 3!a_3 \qquad \rightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

....

$$f^{(n)}(x) = S^{(n)}(x) = n!a_n \ldots \qquad \rightarrow f^{(n)}(x_0) = n!a_n \rightarrow \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Достаточные признаки разложения функции в ряд Тейлора.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (2)\text{– ряд Тейлора.}$$

Формула Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (3),\text{ где } \quad \bar{x}\in[x_0,x]$$

В формуле (3) первые n - слагаемых соответствуют частичной сумме ряда (2).

$$\rightarrow f(x)=S_n(x)+R_n(x) \quad (5).$$

Признак 1. Если функция бесконечное число раз дифференцируема и $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0 \quad (4)$, то функцию можно разложить в ряд Тейлора.

Доказательство:

Пусть ряд (2)-сходится, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$.

Вычислим предел левой и правой части формулы (5): $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) + \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$.

$f(x) = S(x) \equiv (1) \to$ функция разложима в степенной ряд.

Признак 2. Если функция бесконечное число раз дифференцируема, и все её производные в точке x_0 ограничены, т.е. $\left|f^{(n)}(x_0)\right| < M, \ (\forall M > 0)$ то функция разложима в ряд Тейлора.

Доказательство:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \to \left|R_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\overline{x})\right|}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1}.$$

$\left|x - x_0\right| < 2R = \delta$, т.к. отрезок $\left|x - x_0\right|$ лежит внутри области сходимости от $-R$ до R

$$\to \left|R_n(x)\right| < \frac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}$ и докажем его сходимость, используя признак Даламбера.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\delta^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!\,\delta^{n+1}}=\delta\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0<1$ – сходится, отсюда по необходимому признаку сходимости числового ряда предел общего члена равен 0. $\rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}=0$

$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|<M\lim_{n\to\infty}\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}=0$ $\rightarrow$ условие (4) выполняется, значит, по 1-му признаку функция разложима в ряд Тейлора.

Разложение функций вряд Маклорена.

Замечание: Ряд Маклорена получается из ряда Тейлора, если принять в ряде Тейлора $x_0 = 0$.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

1. $f(x) = e^x$

$$f(0) = 1; \qquad f^{(n)}(x) = e^x; \qquad f^{(n)}(0) = 1 \rightarrow$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$, с учётом, что: $0! = 1$

Найдём область сходимости полученного ряда, используя признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!\,x^n}\right| < 1 \rightarrow |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} < 1 \rightarrow |x|\cdot 0 < 1 \rightarrow x \in (-\infty;\infty) -$$ область сходимости

Пример: $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{x}dx = \int\limits_0^1 \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}{x}dx = \int\limits_0^1 \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^{n-1}}{n!}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{x^n}{n}\Big|_0^1 =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} = 1.36 \qquad \varepsilon = 0.01$

2. $f(x) = \sin x$

$f(0) = 0 \qquad f'(x) = \cos x; \quad f'(0) = m; \qquad f''(x) = -\sin x; \quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x; \quad f'''(0) = -1; \qquad f''''(x) = \sin x; \quad f''''(0) = 0 \rightarrow$

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}(-1)^{n+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}\cdot(2n-1)!}{(2n+1)!\cdot x^{2n-1}}\right| < 1 \rightarrow x^2 \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2n(2n+1)}\right| < 1 \rightarrow x^2\cdot 0 < 1 \rightarrow x \in (-\infty;\infty)$ – **область сходимости.**

3. $f(x) = \cos x$

$f(0) = 1;\quad f'(x) = -\sin x;\quad f'(0) = 0;\qquad f''(x) = -\cos x;\quad f''(0) = -1$

$f'''(x) \sin x;\quad f'''(0) = 0;\qquad f''''(x) = \cos x;\quad f''''(0) = 1 \rightarrow$

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} \cdot (-1)^n}{(2n)!},\quad x \in (-\infty; \infty)$$ – **область сходимости.**

4. $f(x) = (1+x)^m$

$f(0) = 1;\qquad f'(x) = m(1+x)^{m-1};\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2};\qquad f''(0) = m(m-1) \rightarrow$

$$f(x) = (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left[m(m-1) \cdot \ldots (m-(n-1))\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{[m(m-1)\cdot\ldots(m-n)]}{x^n[m(m-1)\cdot\ldots(m-(n-1))]}\right| < 1 \Rightarrow |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right| < 1 \rightarrow \qquad |x|\cdot|-1| < 1 \rightarrow$$

$|x| < 1 \rightarrow x \in (-1;1)$ **- область сходимости.**

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \ldots (1)$$

С помощью степенных рядов можно интегрировать дифференциальные уравнения произвольного порядка.

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2) \qquad \text{н.у.} \begin{matrix} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \end{matrix}.$$

Коэффициенты для первых 2-х слагаемых в решении (1) берутся из н.у.

$y''(x_0)$-получится, если подставить н.у. в исходное уравнение (2):

$$y''(x_0) = f(x_0, y_0, y_{10}) = y_{20}$$

Третья и т.д. производная будут найдены, если необходимое число раз продифференцировать дифференциальное уравнение (2) как сложную функцию и подставить в полученный результат н.у.:

$$y''' = f'_x(x,y,y') + f'_y(x,y,y') + f'_{y'}(x,y,y')y'' \rightarrow y'''(x_0) = f'_x(x_0,y_0,y_{10})y' +$$

$$+ f'_y(x_0,y_0,y_{10})y_{10} + f'_{y'}(x_0,y_0,y_{10})y_{20}$$

$$y'''(x_0) = y_{30}$$

$$y(x) = y_0 + y_{10}(x-x_0) + \frac{y_{20}}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{y_{30}}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

Пример: $y''' = x + 2y + y' - y''$. Н.у. $y(0)=1; \quad y(0)=0; \quad y''(0)=-1;$

$$y'''(0) = 0+2+0+1 = 3; \quad y'''' = 1 + 2y' + y'' - y''' \rightarrow y''''(0) = 1-1-3 = -3.$$

$$y(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 - \frac{3x^4}{4!} + \dots$$

Понятие ряда Фурье и определение его коэффициентов.

Определение: Функциональный ряд называется тригонометрическим, если общий член его содержит функцию cos или sin.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + \text{в}_n \sin nx \right] \quad (1)$$

Рассмотрим знакоположительный сходящийся числовой ряд

$$S = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[|a_n| + |\text{в}_n| \right] \quad (2)$$

(2) ряд больше ряда составленного из абсолютных величин ряда (1), значит (1) является мажорируемым, его можно интегрировать.

Так как cos и sin периодические функции, то ряд (1) будем интегрировать на интервале от $-\pi$ до $+\pi$.

Для нахождения коэффициента a_0 проинтегрируем левую и правую часть формулы (1).

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right] =$$

$$= \frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n 2\int_0^{\pi}\cos nx dx + 0\right] = a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} = a_0\pi$$

Замечание: Определённый интеграл на отрезке, симметричном относительно 0, от нечётной функции равен 0, от чётной функции равен двум интегралам на половине отрезка.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad (3)$$

Для нахождения коэффициента a_n, левую и правую часть (1) умножаем на $\cos kx$ $(k - const,\ k \in N)$ и интегрируем.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx}_{I_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx dx}_{I_1} + b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin\ x\cos kx dx}\right] \quad (4)$$

$$I_0 = 2\int_0^{\pi}\cos kx dx = 2\left.\frac{\sin kx}{k}\right|_0^{\pi} = 0$$

1 случай $(k = n)$. Используя формулу тригонометрии $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos(\alpha)$, получим:

$$I_1 = 2\int_0^{\pi}\cos^2 nx dx = 2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx = \left.(x + \underbrace{\frac{\sin 2nx}{2n}}_{0})\right|_0^{\pi} = \pi$$

2 случай $(k \neq n)$ Используя формулу тригонометрии

$2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$, получим:

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \times \cos nx dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = \int_{0}^{\pi} \left[\cos(x(k+n)) + \cos(x(k-n))\right] dx =$$

$$= \left[\frac{\sin(x(k+n))}{k+n} + \frac{\sin(x(k-n))}{k-n}\right]\Bigg|_0^{\pi} = \left[\frac{\sin(\pi(k+n))}{k+n} + \frac{\sin(\pi(k-n))}{k-n}\right] = 0$$

$I_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx dx = 0, (k=n)$,так как sin - нечётная.

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin nx \cos kx dx}_{нечётная} = 0, (k \neq n)$$

В итоге имеем: $I_0 = 0$, $I_1 = \pi, (k=n)$, $I_1 = 0, (k \neq n)$, $I_2 = 0, (k=n)$, $I_2 = 0, (k \neq n)$

Подставляем значение интегралов I_0, I_1, I_2 в формулу (4):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_n \pi \text{ (когда } k = n) \quad \rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (5)$$

Для нахождения коэффициента $в_n$ левую и правую часть формулы (1) умножаем на $\sin kx$ и интегрируем. В итоге аналогично a_n получим:

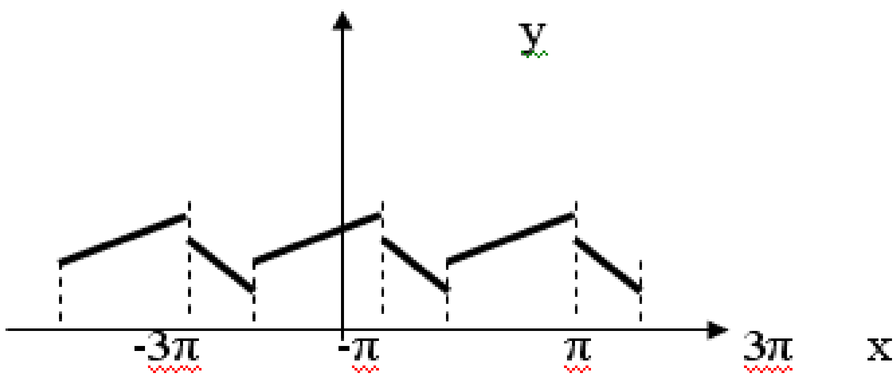
$$в_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (6)$$

Определение: Рядом Фурье называется тригонометрический ряд (1), если коэффициенты для него вычисляются по формулам (3,5,6).

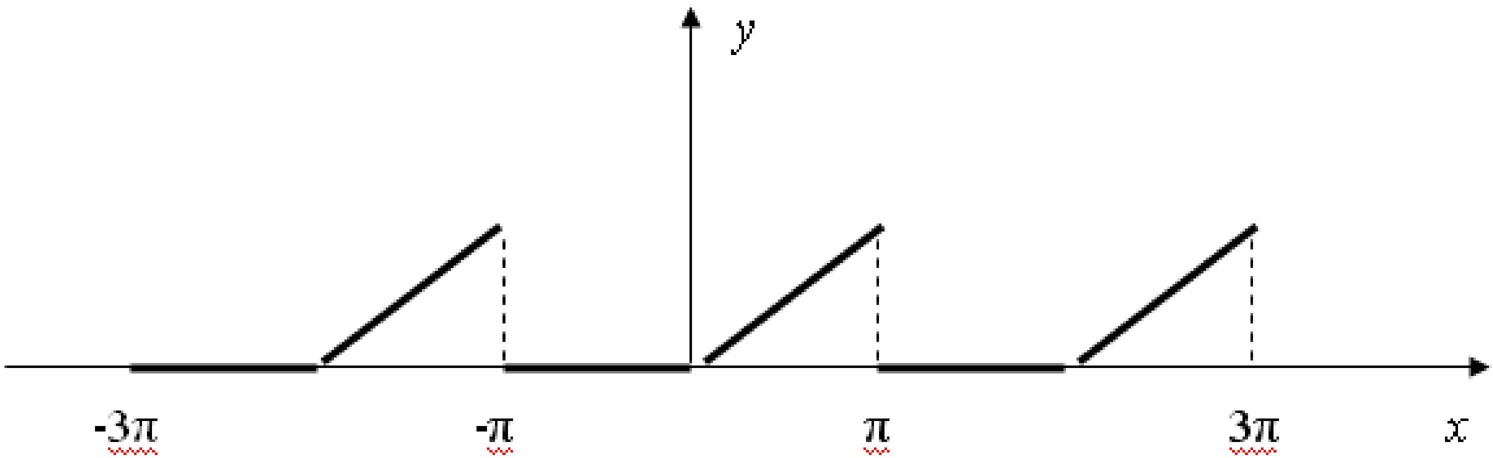
Необходимое условие разложения функции в ряд Фурье.

Если функция разложима в ряд Фурье, то она является периодической функцией.

Определение: Функция называется кусочно-монотонной, если она имеет точки разрыва 1-го рода.



Пример: $f(x)=\begin{cases} x, x\in[0,\pi] \\ 0, x\in[-\pi,0] \end{cases}$



$$a_0\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx$$

Интегрируем по частям: $u = x, du = dx; \quad dv = \cos nx dx, v = \dfrac{\sin nx}{n};$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin x dx\right) = \frac{1}{\pi n}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}(\cos \pi n - 1)$$

Анализируем два случая:

$n - \textit{нечётная} \to \cos \pi n = -1, n - \textit{четная} \to \cos \pi n = 1 \to \cos \pi n = (-1)^n$

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right];$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \quad \left(\textit{по частям}: u = x; du = dx; \quad dv = \sin nx dx; k = \frac{-\cos nx}{n}\right).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}(-1)^n - \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right] = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$$

Ряд Фурье для чётных и нечётных функций.

1 случай: $f(x)-$ **чётная** $\rightarrow a_0 = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx$

$f(x)\cos nx-$ **чётная** $\rightarrow a_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$ $\qquad f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

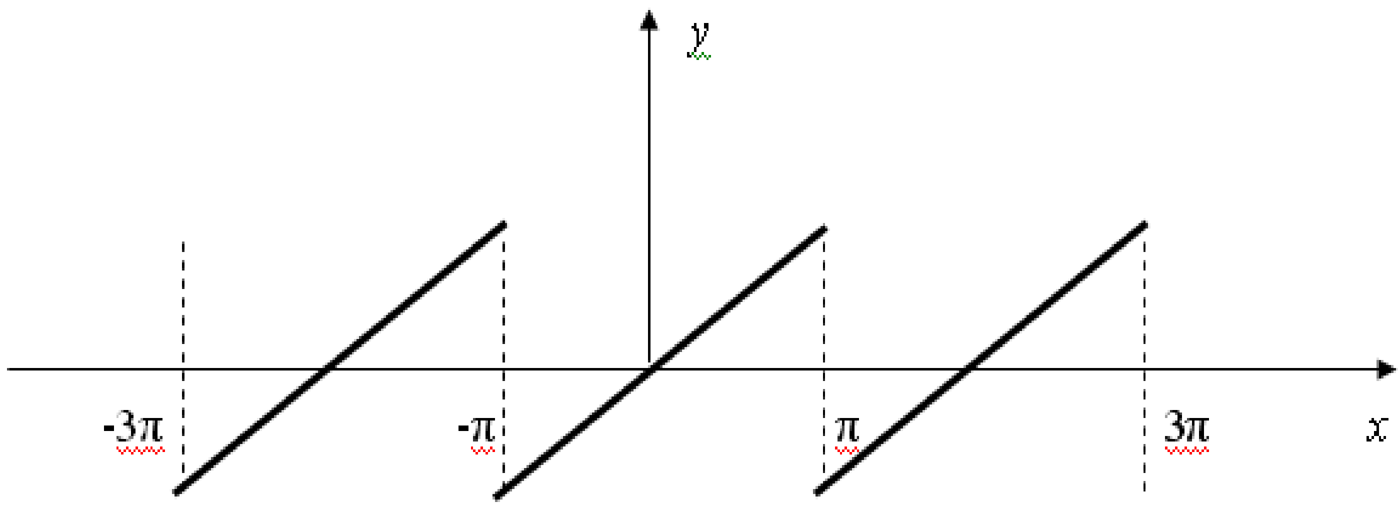
$f(x)\sin x-$ **нечётная** $\rightarrow \text{в}_n = 0$

Замечание: Пример для этого случая приведен в следующем вопросе.

2 случай: $f(x)-$ **нечётная** $\rightarrow a_0 = 0$ $\qquad f(x)\cos nx-$ **нечётная** $\rightarrow a_n = 0$

$f(x) = \sin nx-$ **чётная** $\rightarrow \text{в}_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$ $\qquad f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{в}_n \sin nx$

Пример: $f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi]$



И рисунка видно, что на основном интервале: $x \in [-\pi, \pi]$ график функции симметричен относительно начала координат, значит, исходная функция - нечётная $\rightarrow a_0 = 0 \rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cdot \sin nx dx. \quad \left(по\ частям: u = x; du = dx; \quad dv = \sin nx dx; k = \frac{-\cos nx}{n} \right).$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}(-1)^n - \frac{1}{n^2}\sin nx \Big|_0^{\pi} \right]$$

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n};$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \sin nx \right] = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \right]$$

Ряд Фурье для функции с периодом

$2L, \quad т.е. \quad x \in [-L, L]$

Преобразуем исходную функцию $f(x)$ с помощью замены: $x = \frac{tL}{\pi}$ в функцию $f(t)$. Выразив из формулы замены: $t = \frac{\pi x}{L}$, найдём интервал для новой функции: $t_н = -\pi;\ t_в \frac{\pi L}{L} = \pi \to t \in [-\pi \pi]$. Полученная функция $f(t)$ имеет период 2π, значит, для неё справедливы формулы (1), (3), (5), (6):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt];$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{tl}{\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} f(x) \frac{\pi}{L} dx \to a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{tL}{\pi}\right)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\frac{\pi}{L}dx \rightarrow$$

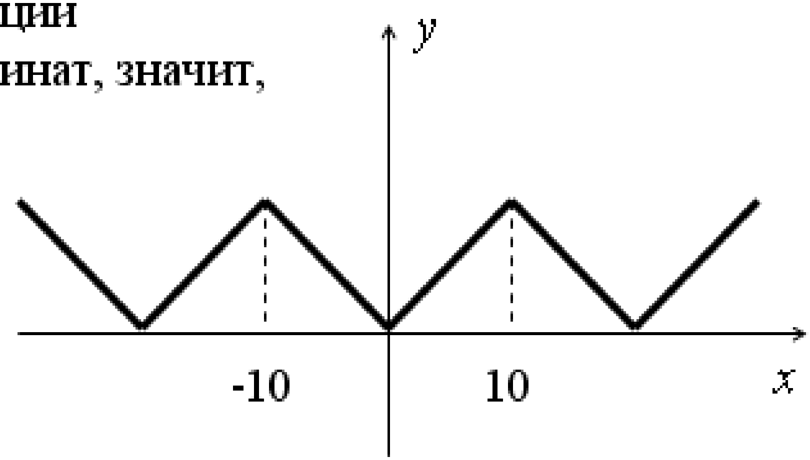
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{\pi n x}{L}dx\,;$$

Аналогично: $b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{\pi n x}{L}dx$

Делаем обратную замену: $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{\pi n x}{L} + b_n\sin\frac{\pi n x}{L}\right]$

Пример: $f(x)=\begin{cases}-x, x\in[-10,0]\\ x, x\in[0,10]\end{cases};\quad L=10$

Из рисунка видно, что график функции симметричен относительно оси ординат, значит, исходная функция - чётная $\to b_n=0$.



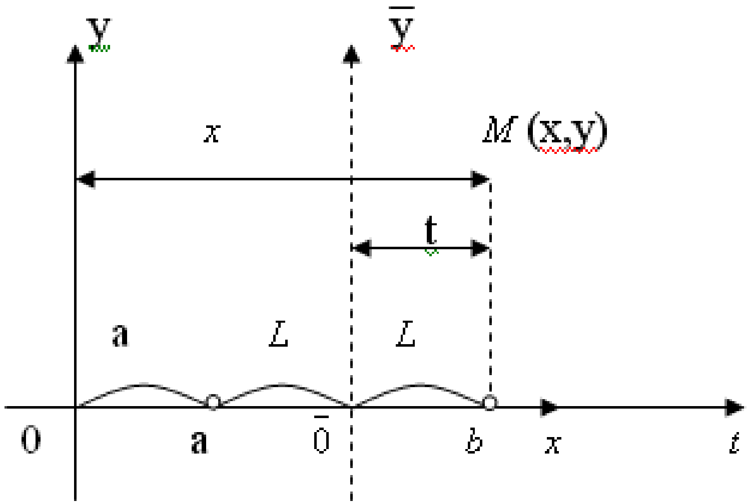
$$a_0=\frac{2}{10}\int_0^{-10} x\,dx=\frac{1}{5}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{10}=10$$

$$a_n=\frac{2}{10}\int_0^{10} x\cos\frac{\pi nx}{10}dx=\frac{1}{5}\underbrace{\left[\frac{10x}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{10}\right]\Big|_0^{10}}_{=0}-\frac{10}{\pi n}\int_0^{10}\sin\frac{\pi nx}{10}dx=\begin{pmatrix}\text{по частям:} & u=x; du=dx\\ dv=\cos\frac{\pi nx}{10}dx; & v=\frac{10}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{10}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left(-\cos\frac{10}{\pi n}\right)\Big|_0^{10}=\frac{20}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n-1\right];$$

$$f(x)=5+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{20}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos\frac{\pi nx}{10}=5+\frac{20}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos\frac{\pi nx}{10};$$

Ряд Фурье для функции на произвольном отрезке $[a,b]$.



Переместим ось y в середину отрезка $[a,b]$. Тогда: $L = \frac{b-a}{2}$;

С помощью замены переменных $x = t + L + a$ получится функция с периодом $2L$, которую можно разложить в ряд Фурье по формулам предыдущего вопроса, заменяя в этих формулах x на t.

После разложения функции $f(t)$ в ряд Фурье осуществляется обратная замена и вместо t подставляется: $t = x - L - a$.

Пример: $f(x)=3x,\quad x\in[3,7]$

$$L=\frac{b-a}{2}=\frac{7-3}{2}=2;$$

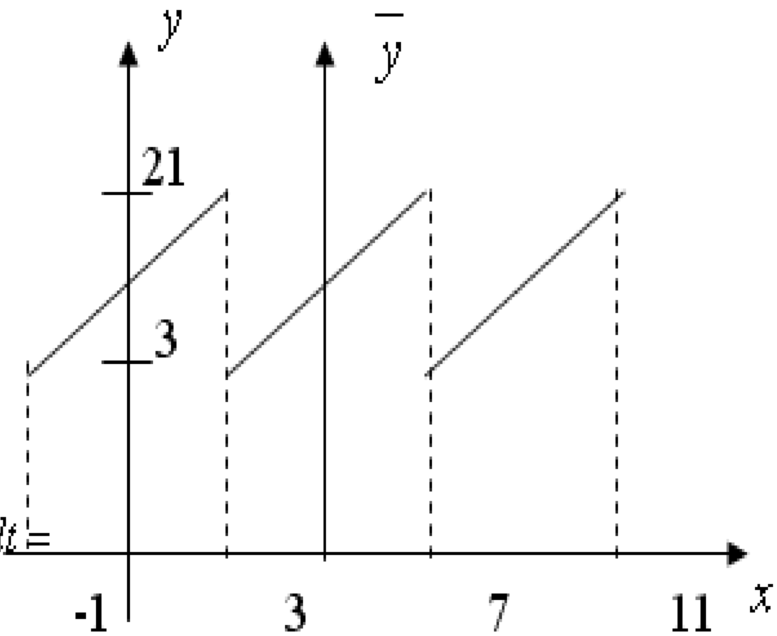
$x=t+a+L=t+3+2$

Замена $: x=t+5$;

Обратная замена $: t=x-5$

$$f(t)=3(t+5);\quad a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)dt=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}3(t+5)dt=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2}+5t\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{3}{2}(2+10-2+10)=30;$$



$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{\pi n t}{L}dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}3(t+5)\cos\frac{\pi n t}{2}dt = \begin{pmatrix} \text{по частям: } u=t+5 \to du=dt \\ dv=\cos\frac{\pi n t}{2}dt \to v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n t}{2}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{3}{2}\left((t+5)\frac{2}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n t}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} - \frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{2}\sin\frac{\pi n t}{2}dt\right) = \frac{3}{\pi n}\left(0-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n t}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} = -\frac{6}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n-(-1)^n\right]=0.$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{\pi n t}{L}dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}3(t+5)\sin\frac{\pi n t}{2}dt = \begin{pmatrix} \text{по частям: } u=t+5 \to du=dt \\ dv=\sin\frac{\pi n t}{2}dt \to v=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n t}{2}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{3}{2}\left((t+5)\frac{2}{\pi n}\left(-\cos\frac{\pi n t}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} + \frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{2}\cos\frac{\pi n t}{2}dt\right) = \frac{3}{\pi n}\left(-7(-1)^n+3(-1)^n+\underbrace{\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n t}{2}}_{=0}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{12}{\pi n}(-1)^{n+1}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{\pi n}{L} + b_n\sin\frac{\pi n t}{L}\right] = 15 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{12}{\pi n}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi n t}{2}\right];$$

$$f(x) = 15 + \frac{12}{\pi}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n(x-5)}{2}.$$