ОПЕРЕДЕЛИТЕЛИ

Правило: Определитель 2-го порядка вычисляется как разность произведений элементов главной и побочной диагонали.

Алгебраическое дополнение элемента a_{il}: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Определитель: $\det A = \sum_{n=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$

Решение системы методом Кремера: $x_j = \dfrac{D_{x_j}}{D} \quad (j = 1, n)$

МАТРИЦЫ

Умножение матриц – матрица $C_{mn} = A_{ml} B_{ln}$, если $C_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$.

Замечание: Перемножать можно такие матрицы, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Замечание: Размерность матрицы определяется числом строк первой матрицы и числом столбцов второй матрицы.

Замечание: Произведение двух матриц в общем случае не перестановочно, т.е. $AB \neq BA$. В частном случае произведение двух матриц может быть перестановочно, если эти матрицы квадратные и имеют одинаковую размерность.

Обратная матрица: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A$

Определение: Рангом матрицы называется наивысший порядок определителя отличного от нуля, который можно составить из исходной матрицы RgA.

Решение системы уравнений матричным способом: $X = A^{-1}B$

Случаи решения системы уравнений:

1. Система имеет единственное решение, если $RgA = Rg\overline{A} = m = n$.
2. Система имеет лишние уравнения, если $RgA = Rg\overline{A} < m$, в этом случае отбрасываются любые уравнения $(m - RgA)$ и система приводится к 1-му случаю.
3. Система имеет бесчисленное множество решений, если $RgA = Rg\overline{A} < n$, в этом случае любые m неизвестные выражаются через остальные $(n - RgA)$ неизвестных.
4. Система решений не имеет, если $RgA \neq Rg\overline{A}$.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Коллинеарность: $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=k$

Координаты вектора, заданного 2-мя точками: $M_1M_2\left(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\right)$

Координаты точки $M\left(x,y,z\right)$ делящие отрезок AB на части в соотношении:

$\frac{MB}{AM}=k$: $x=\frac{x_B+kx_A}{k+1},y=\frac{y_B+ky_A}{k+1},z=\frac{z_B+kz_A}{k+1}$

Скалярное произведение: $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos\alpha$ и в координатах: $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

Приложения скалярного произведения:

1. Вычисление проекции: $Пр_{\bar{a}}\bar{b}=\frac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{\bar{a}}\to Пр_{\bar{a}}\bar{b}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a^2{}_x+a^2{}_y+a^2{}_z}}$
2. Вычисление модуля вектора: $\overline{a^2}=\left|\bar{a}\right|^2\to\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\overline{a^2}}=\sqrt{\left(\bar{a},\bar{a}\right)}\to\left|\bar{a}\right|=\sqrt{a^2{}_x+a^2{}_y+a^2{}_z}$;
3. Вычисление угла между векторами:

$$\cos\alpha=\frac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|}\to\cos\alpha=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a^2{}_x+a^2{}_y+a^2{}_z}\sqrt{b^2{}_x+b^2{}_y+b^2{}_z}}$$

Векторное произведение 2-х векторов это вектор $\bar{c}=\left[\bar{a},\bar{b}\right]$, для которого выполняются 3 следующих условия:

1. $\left|\bar{c}\right|=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\sin\alpha$ 2. $\bar{c}\perp\bar{a},c\perp b$ 3. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют правую тройку

Анти перестановочность: $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=-\left[\bar{b},\bar{a}\right]$. В координатах: $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$

Приложения векторного произведения:

1) Площадь параллелограмма, построенного на 2-х векторах: $S=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\sin\alpha\to S=\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|$
2) Площадь треугольника, построенного на 2-х векторах: $S=\frac{1}{2}\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|$

Смешанное произведение: $\bar{a}\bar{b}\bar{d}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\d_x&d_y&d_z\end{vmatrix}$

Приложения смешаного произведения:

1. Объём параллелепипеда, построенного на трёх векторах. $V=\left|\bar{a}\bar{b}\bar{d}\right|$
2. Объём пирамиды: $V=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{d}\right|$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Прямая на плоскости. Девять видов уравнения.

1. Общее уравнение прямой: $Ax+Bx+C=0$ (1).
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $L: y=kx+b$

Замечание: Коэффициент b обозначает смещение прямой по оси y.

Замечание: Коэффициент k численно равен tg угла наклона прямой к оси абсцисс.

3. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку: $y=k\left(x-x_0\right)+y_0$.

4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

5. Уравнение прямой в отрезках. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

6. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору. $A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0$ Замечание: Коэффициенты A и B в первом уравнении обозначают координаты нормального к прямой вектора.

7. Параметрические уравнения прямой. $\begin{matrix} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{matrix}$

8. Каноническое уравнение прямой. $t=\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$

Замечание: Уравнения (4)-(8) всегда можно привести к общему виду уравнения (1).

9. Нормальные уравнения прямой.

$x\cos\alpha+y\cos\beta-P=0$ (9)

P -расстояние от начала координат до прямой

Девятое уравнение получается из первого, умножением первого уравнения на коэффициент.

$$SgnC=\begin{cases} +1, если\, C>0 \\ 0, если\, C=0 \\ -1, если\, C<0 \end{cases} \qquad M=-\frac{SgnC}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Расстояние от точки до прямой $d=\left|\frac{A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$

Угол между прямыми $tg\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$

Плоскость в пространстве. Шесть видов уравнений.

1. Общее уравнение плоскости: $Ax+By+Cz+D=0$.
2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0\left(x_0y_0z_0\right)\perp$ заданному вектору $\vec{N}(ABC)$. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.
3. Уравнение плоскости, проходящей через три данных точки.

$$M_1\left(x_1y_1z_1\right),M_2\left(x_2y_2z_2\right),M_3\left(x_3y_3z_3\right)\ \begin{vmatrix} x-x_1, y-y_1, z-z_1 \\ x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 \\ x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1 \end{vmatrix}=0\ .$$

Замечание: Это уравнение приводится к общему виду, если раскрыть определитель по первой строке.

4. Уравнение плоскости в отрезках. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$-уравнение плоскости в отрезках.
5. Параметрическое уравнение плоскости.
6. Нормальное уравнение плоскости: $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-P=0$

Прямая в пространстве, четыре вида уравнений.

1. Параметрическое уравнение прямой: $\begin{aligned} x&=x_0+mt \\ y&=y_0+nt \\ z&=z_0+pt \end{aligned}$
2. Каноническое уравнение плоскости: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$

$\bar{l}(m,n,p)-$направляющий вектор прямой.

3. Уравнение прямой проходящей через две заданные точки.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Уравнение прямой, образованное пересечением двух плоскостей:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_1}{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

Пять задач на прямую и плоскость в пространстве.

1. Расстояние от заданной точки до плоскости. $d=\left|\frac{A\left(x-x_0\right)+B(y-y_0)+C(z-z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$

2. Точка пересечения прямой и плоскости. $\to t=-\frac{D+Ax_0+By_0+Cz_0}{Am+Bn+Cp}$ - параметр точки пересечения прямой и плоскости.

Подставляем t в уравнение (1) и получим координаты точки M.

3. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

$$\cos\alpha = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ -условие перпендикулярности прямых.

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ - условие параллельности.

4. Расстояние между параллельными прямыми. $d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overline{e_1}\right]\right|}{\left|\overline{e_1}\right|}$

5. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

$$\sin\alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$Am + Bn + Cp = 0$ - условие параллельности прямой и плоскости.

$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ -условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Линии 2 порядка

1. Парабола: каноническое $y = 2px$ (1) Обыкновенное $y = ax^2$ (2)
2. Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$
3. Гипербола: каноническое $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$ Обыкновенное $y = \frac{1}{x}$

<u>Поверхности второго порядка и их классификация. Цилиндрические поверхности.</u>

Класс Поверхности	Вид поверхности	Каноническое уравнение
Цилиндрические поверхности	Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
	Параболический цилиндр	$y^2 = 2px$
Конусы	Эллиптический конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
Гиперболоиды	Однополостной гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
	Двуполостной гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
Эллипсоиды	Эллипсоиды	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Параболоиды	Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$
	Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$

ПРЕДЕЛЫ

1. Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
2. Второй замечательный предел:

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{nx}=e^{kn}\quad(1);\qquad \lim\limits_{y\to 0}(1+ky)^{\frac{n}{y}}=e^{kn}\quad(2);\qquad \lim\limits_{y\to 0}\frac{n\ln(1+ky)}{y}=kn\quad(3).$$

<u>Точки разрыва.</u>

Определение: Точка x_0 называется точкой разрыва, если в этой точке не выполняется условие непрерывности. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

Классификация точек разрыва:

1. Устранимая точка разрыва первого рода, если выполняется следующие условия: $\lim\limits_{x\to x-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}\neq f(x_0)$
2. Т.р. первого рода типа скачка, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq f(x_0)$
3. Т.р. второго рода, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\pm\infty\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\pm\infty$

Производные основных 13 элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
1. $y=a^x$	$y'=a^x\ln a$	2. $y=e^x$	$y'=e^x$
3. $y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$	4. $y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
5. $y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$	6. $y=\sin x$	$y'=\cos x$
7. $y=\cos x$	$y'=-\sin x$	8. $y=tgx$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
9. $y=ctgx$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	10. $y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12. $y=arctgx$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
13. $y=arcctgx$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$		

Гиперболические функции:

$$\boxed{y=\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}}\to y'=\mathrm{ch}(x)\qquad \boxed{y=\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}}\to y'=\mathrm{sh}(x).$$

Правила дифференцирования:

1. Производная параметрической функции. $y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}$ и $y''(x)=\frac{\left(y'(x)\right)'_t}{x'(t)}$
2. Производная сложной функции: $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'(z)g'(x)$
3. Производная обратной функции: $x'_y=\frac{1}{y'_x}$
4. Производная от константы равна нулю.
5. Производная от суммы: $(u+v)'=u'+v'$
6. Производная произведения: $(uv)'=u'v+uv'$
7. Производная частного: $\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Формула Тейлора

$$f(x)=P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ -

и Маклорена: $f(x)=P_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Таблица неопределённых интегралов.

$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int e^x dx=e^x+c$
$\int \sin dx=-\cos x+c$	$\int \cos x dx=\sin x+c$	$\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=tgx+c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-ctgx+c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx=arctgx+c$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c$	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+c$	$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert+c$
$\int tgxdx=-\ln\lvert\cos x\rvert+c$	$\int ctgxdx=\ln\lvert\sin x\rvert+c$	$\int dx=x+C$

Тригонометрическая подстановка

1) $\sqrt{a^2-x^2}\to x=a\sin t$ 2) $\sqrt{x^2-a^2}\to x=\frac{a}{\sin t}$ 3) $\sqrt{x^2+a^2}\to x=atgt$

$\int udv=uv-\int vdu$ - формула интегрирования по частям.

Универсальная тригонометрическая подстановка.

$t=tg\frac{x}{2}$; $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $x=2arctgt$; $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

Формула Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b \text{ или } \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Комплексные числа

$$z=a+ib \quad r=\sqrt{a^2+b^2}; \quad \varphi=arctg\frac{b}{a}.$$

$\to z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ - тригонометрическая форма записи комплексного числа

$z=re^{i\varphi}$ - показательная форма записи комплексного числа

Модуль произведения комплексных чисел в тригонометрической форме равен произведению модулей, аргумент произведения равен сумме аргументов.

формула Муавра: $z^n=r^n[\cos(\varphi n)+i\sin(\varphi n)]$

Модуль частного комплексных чисел в тригонометрической форме равен частному модулей, аргумент произведения равен разности аргументов.