Дифференциальные уравнения 2 порядка

Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Общие сведения о дифференциальном уравнении 2-го порядка и теорема Коши для него.
Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.
Понятие линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.
Свойства однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.
Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.
Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка: теорема о структуре общего решения.
Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
Понятие системы и нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка.
Решение нормальной системы линейного дифференциального уравнения 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом подстановки.

Общие сведения о дифференциальном уравнении 2-го порядка и теорема Коши для него.

Дифференциальное уравнение 2-го порядка имеют вид: $y'' = f(x, y, y')$ (1)

т. Коши: Если в уравнении (1) функции $f, f'_y, f'_{y'}$ непрерывны $\forall xyy' \in V \in R^3$, то через каждую точку области V проходит единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее двум начальным условиям.

Замечание: Решением уравнения (1) будет являться бесконечное число поверхностей проходящих через каждую точку области V.

Определение: Общим решением уравнения (1) будет являться функция $y = y(x, c_1, c_2)$ непрерывно зависящая от аргумента x и двух произвольных постоянных определяемых единственным образом для любых н.у.

Определение: Частным решением уравнения (1) называется функция $y(x, c_{10}, c_{20})$ удовлетворяющая двум н.у. $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y_{10}$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

Первый случай: Признаком этого случая является отсутствие в явном виде в уравнении (1) переменной y, то есть дифференциальное уравнение имеет вид: $y'' = f(x, y')$.

Замена: $z(x) = y'$ (2)

$\rightarrow z' = y''$ $\qquad z' = f(x, z)$ (3)

Решая дифференциальное уравнение первого порядка (3), находим функцию $z = z(x, c_1)$. Подставляя $z = z(x, c_1)$ в дифференциальное уравнение первого порядка (2) и решая его, находим искомую функцию $y = y(x, c_1, c_2)$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Пример: $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$

$z' + \dfrac{z}{x} = x$ - линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

$P(x) = \dfrac{1}{x}$; $\qquad g(x) = x$

Используем формулу: $z = \left[\int g(x) e^{\int P(x)dx} dx + C\right] e^{-\int P(x)dx}$

$$z = [\int x e^{\int \frac{1}{x}dx} dx + C] e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \left[\int \underbrace{x e^{\ln x}}_{x} dx + C\right] \underbrace{e^{-\ln x}}_{\frac{1}{x}} = [\int x^2 dx + C]\frac{1}{x} = [\frac{x^3}{3} + C]\frac{1}{x}$$

$$z = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} \rightarrow$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} \to \int dy = \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}\right) dx \to$$

$$\to y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2$$ - общее решение.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Второй случай: В этом случае уравнение (1) не содержит в явном виде переменной x, то есть имеет вид $y'' = f(y, y')$.

Замена: $z = z(y) = y'$ (4)

$y'' = z'y' \to y'' = z'z \qquad z'z = f(y, z)$ (5)

Замечание: Если уравнение (5) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, то $z' = \dfrac{dz}{dy}$.

Решая дифференциальное уравнение (5), находим функцию $z = z(y, c_1)$. Подставляя $z = z(y, c_1)$ в дифференциальное уравнение (4) и решая его, находим $y = y(x, c_1, c_2)$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Пример: $y'' = \dfrac{e^y}{3y'}$ **н.у.** $y(-3) = 0;\ \ y'(-3) = 1$

$$z'z = \frac{e^y}{3z} \to$$

$\to z' = \dfrac{e^y}{3z^2}$ **- дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными**

$$\frac{dz}{dy} = \frac{e^y}{3z^2} \to 3\int z^2 dz = \int e^y dy \to z^3 = e^y + C_1 \to z = \sqrt[3]{e^y + C_1}$$

$y' = \sqrt[3]{e^y + C_1}$ **- дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными**

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{e^y + C_1} \qquad \int \frac{dy}{\sqrt[3]{e^y + C_1}} = \int dx$$

Общего решения дифференциальное уравнение не имеет, т.к. интеграл левой части не имеет первообразный в элементарных функциях.

© **2011, Фёдоров Павел Борисович**

Из н.у. следует $1=\sqrt[3]{e^{0}+C_1}\to C_1=0$

$$\int\frac{dy}{\sqrt[3]{e^{y}}}=x_1+C_1\to\int e^{-\frac{y}{3}}dy=x+C_2\to-3e^{-\frac{y}{3}}=x+C_2\to e^{-\frac{y}{3}}=\frac{x+C_2}{-3}$$

$$-\frac{y}{3}=\ln\frac{x+C_2}{-3}\to y=-3\ln\frac{x=C_2}{-3}$$

Из н.у. $0=-3\ln\frac{-3+C_2}{-3}$ $\quad 1-\frac{C_2}{3}=1$

$C_2=0$ $\quad y=-3\ln(-\frac{x}{2})$ $\quad\forall x\le 0$ - частное решение.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Понятие линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Определение: Дифференциальное уравнение 2-го порядка называются линейными, если коэффициенты перед функцией производными от неё являются функциями только аргумента x, и функция её производной входит в уравнение первой степени.

$$a_1(x)y''+a_2(x)y'+a_3(x)y+a_4(x)=0 \,|: a_1(x)\neq 0$$

Замечание: $a_1(x)\neq 0$ т.к. в противном случае получится дифференциальное уравнение 1-го порядка: $a_2(x)y'+a_3(x)y+a_4(x)=0$

$$\to y''+\frac{a_2(x)}{a_1(x)}y'+\frac{a_3(x)}{a_1(x)}y=-\frac{a_4(x)}{a_1(x)}\to$$

$$\to y+p_1(x)y'+p_2(x)y=g(x). \qquad (1).$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Определение: Линейное дифференциальное уравнение называется однородным, если правая часть в уравнении (1) равна нулю и неоднородным в противном случае.

Определение: Два частных решения в уравнении (1) называются линейно зависимыми, если их отношение равно константе и независимыми, если их отношение - функция.

Определение: Два частных линейно независимых решения образуют фундаментальную систему уравнения (1).

Определение: Определитель 2-го порядка составленный из 2-х частных решений и производных от них называется определителем Вронского.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Свойства однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Первое свойство: сумма двух частных решений

$$y'' + P_1 y' + P_2 y = 0 \text{. (1)}$$

Свойство: Сумма двух частных решений уравнения (1) так же является решением этого уравнения.

Доказательство:

y_1, y_2 - частные решения уравнения (1).

Требуется доказать: что $y = y_1 + y_2$ (2) - частное решение уравнения (1)

Подставляем частное решение y_1, y_2 в уравнение (1)

$$+\begin{cases} y_1'' + P_1 y_1' + P_2 y_1 = 0 \\ y_2'' + P_1 y_2' + P_2 y_2 = 0 \end{cases}$$

$$(y_1 + y_2)'' + P_1 (y_1 + y_2)' + P_2 (y_1 + y_2) = 0$$

Каждая из скобок заменяется формулой (2)

$$y'' + P_1 y' + P_2 y = 0 \equiv (1) \rightarrow$$

решение (2) является частным решением уравнения (1).

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Второе свойство: умножение решения на константу.

Свойство: Произведение частного решения на константу также является частным решением уравнения (1).

Доказательство:

y_1 - частное решение уравнения (1).

Требуется доказать: $y = cy_1$ (3) - частное решение (1).

Подставляем (3) в (1):

$cy_1'' + cp_1y_1' + cp_2y_1 = 0 \,\big|\, c \to y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1 = 0 \equiv (1) \to (3)$ - частное решение уравнения (1).

Следствие 1 из 1-го и 2-го свойства:

Линейная комбинация 2-х частных решений уравнения (1) также является частным решением этого уравнения: $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Третье свойство: формула Остроградского - Лиувилля.

Свойство: Пусть y_1, y_2 - частное решение уравнения (1).Подставляем y_1, y_2 в уравнение (1).

$$+\begin{cases} y_1'' + P_1 y_1' + P_2 y_1 = 0 & \Big| \; (-y_2) \\ y_2'' + P_1 y_2' + P_2 y_2 = 0 & \Big| \; (y_1) \end{cases}$$

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + P_1 (y_1 y_2' - y_2 y_1') + P_2 (y_1 y_2 - y_2 y_1) = 0.$$

Вычислим определитель Вронского

$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \rightarrow$ вторая скобка является определителем Вронского.

Вычислим производную от определителя Вронского

$w' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \rightarrow$ первая скобка является производной от определителя Вронского.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

$w' + P_1 w = 0 \to w' = -P_1 w$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dw}{dx} = -P_1 w \to \int_{x_0}^{x} \frac{dw}{w} = -\int_{x_0}^{x} P_1 dx$$

(x_0 – const; $x_0, x \in D$ – область решения дифференциального уравнения)

$$\ln w(x)\Big|_{x_0}^{x} = -\int_{x_0}^{x} P_1 dx \to \ln w(x) - \ln w(x_0) = -\int_{x_0}^{x} P_1 dx$$

$\ln \dfrac{w(x)}{w(x_0)} = -\int_{x_0}^{x} P_1 dx \to w(x) = w(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} P_1(x) dx}$ – формула Остроградского - Лиувилля.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Следствия из третьего свойства.

Следствие 2: Если определитель Вронского не равен нулю в одной какой-то точке области решения, то он не равен нулю и во всех точках этой области.

Следствие 3: Определитель Вронского равен нулю, если он составлен из линейно зависимых решений.

$$\frac{y_1}{y_2} = C \rightarrow y_1 = y_2 C \qquad w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cy_2 & y_2 \\ Cy_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

Следствие 4: Определитель Вронского не равен нулю, если он составлен из линейно независимых решений.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Четвертое свойство: Структура общего решения.

Свойство: Если y_1, y_2 - фундаментальная система решений уравнения (1), то $y = c_1y_1 + c_2y_2$ (4) является общим решением этого уравнения.

Доказательство:

Решение (4) является частным решением уравнения (1), что следует из следствия 1.

Для доказательства общности решения необходимо подтвердить, что c_1 и c_2 определяются единственным образом из 2-х производных н.у.: $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_{10}$

Удовлетворяем решение (4) начальным условиям: $\begin{cases} y_0 = c_1y_1(x_0) + c_2y\ (x_0) \\ y_{10} = c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) \end{cases}$. (5)

Получим систему линейных алгебраических уравнений (5) относительно c_1, c_2, которую решаем методом Крамера: $\det A = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$

$W(x_0) \neq 0$ по 4-му следствию т.к. по условию y_1, y_2 - линейно независимые.

$W(x) \neq 0, \forall x \in D$, по 2-му следствию $\rightarrow$ система (5) имеет единственное решение $\rightarrow c_1, c_2$ определяются единственным образом для любых н.у. $\rightarrow$ решение (4) является общим решением уравнения (1).

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

с постоянными коэффициентами.

$$y'' + P_1 y' + P_2 y = 0 \qquad (1)$$

$$(P_1, P_2 \text{- } const)$$

Решение уравнения (1) ищем в следующем виде: $y = e^{kx}$ (2)

где k- неизвестная константа.

Найдем производные: $y' = ke^{kx}$ (3) $y'' = k^2 e^{kx}$ (4)

Подставляем (2,3,4) в (1):

$$k^2 e^{kx} + P_1 k e^{kx} + P_2 e^{kx} = 0 \ \Big| : e^{kx} \rightarrow$$

$$k^2 + P_1 k + P_2 = 0 \text{ -}$$

характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (1).

Вычислим дискриминант: $D = P_1^2 - 4P_2$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Корни характеристического уравнения действительные, разные.

$$D > 0 \to k_{1,2} = \frac{-P_1 \pm \sqrt{D}}{2}$$

Подставляем $k_{1,2}$ в решение (2) получаем два частных решения:

$$y_1 = e^{k_1 x} \ ; \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

Покажем, что эти два решения линейно независимы

$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{x(k_1 - k_2)}$ - функция, так как $k_1 \neq k_2 \to$

$\to y_1, y_2$ - линейно независимые решения

$$\to y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \to y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Пример: $y'' - 7y' + 6y = 0$

$$k^2 - 7k + 6 = 0 \to \qquad D = 49 - 24 > 0 \to \qquad k_1 \frac{7+5}{2} = 6 \ ; \quad k_2 = \frac{7-5}{2} = 1$$

$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x}$ - общее решение.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Корни характеристического уравнения действительные, равные.

$$D = 0 \to k = -\frac{P_1}{2} \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (2) получим одно частное решение $y_1 = e^{kx}$. Второе частное решение будем искать в следующем виде: $y = u(x)e^{kx}$ (6)

$$y' = u'e^{kx} + uke^{kx} = e^{kx}(u' + uk) \qquad (7)$$

$$y'' = ke^{kx}(u' + uk) + e^{kx}(u'' + ku') =$$

$$= e^{kx}(u'' + 2ku' + uk^2) \qquad (8)$$

Подставляем (6,7,8) в уравнение (1) и сокращаем на e^{kx}.

$$u'' + 2ku' + uk^2 + P_1u' + P_1ku + P_2u = 0$$

$$u'' + u'(2k + P_1) + u(k^2 + P_1k + P_2) = 0$$

Вторая скобка равна нулю, так как она является левой частью характеристического уравнения. Подставим в первую скобку k из (5)

$u'' + u'(2(-\frac{P_1}{2}) + P_1) = 0 \to u'' = 0 \to u' = C_1$ - дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{du}{dx} = C_1 \to \int du = C_1 \int dx \to u = C_1x + C_2$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Для получения частного решения зададим произвольные постоянные

$$C_1 = 1; C_2 = 0 \rightarrow u = x \qquad (9)$$

Подставляем (9) в (6) $\quad y_2 = xe^{kx}$.

Покажем, что эти решения линейно независимы:

$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{kx}}{xe^{kx}} = \dfrac{1}{x}$ - функция $\rightarrow y_1, y_2$ - линейно независимы

$$\rightarrow y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad \rightarrow y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$$

Пример: $y'' - 4y' + 4y = 0$ н.у. $y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

$k^2 - 4k + 4 = 0 \rightarrow (k-2)^2 = 0 \rightarrow k = 2 \rightarrow \qquad y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) \rightarrow$

$y' = 2e^{2k}(C_1 + C_2 x) + e^{2x} C_2$ - общее решение.

Из н.у. $\rightarrow 1 = C_1 \rightarrow C_1 = 1 \quad 0 = 2C_1 + C_2 \rightarrow C_2 = -2 \rightarrow$

$$y = e^{2x}(1 - 2x)$$ - частное решение.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Корни характеристического уравнения комплексные.

$$D<0 \to k_{1,2}=\frac{-p_1 \pm \sqrt{|D|}i}{2},\ (i=\sqrt{-1});\quad \to k_{1,2}=-\frac{p_1}{2}\pm\frac{\sqrt{|D|}}{2}i\,.$$

Обозначим $\alpha=\frac{-p_1}{2}$ - действительная часть комплексного числа, $\beta=\frac{\sqrt{|D|}}{2}$ - мнимая часть этого числа.

$$k_{1,2}=\alpha\pm\beta i. \tag{10}$$

Лемма: Если $y=u(x)+v(x)i$ (11) является решением уравнения (1), то действительная часть $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$ этого решения в отдельности также является решением уравнения (1).

Доказательство:

подставляем решение (11) в уравнение (1).

$$u''+v''i+p_1u'+p_1v'i+p_2u+p_2vi=0;\quad (u''+p_1u'+p_2u)+i(v''+p_1v'+p_2v)=0\,.$$

Замечание: Комплексное число равно нулю, если одновременно равны нулю его действительные и мнимые части.

$\to u''+p_1u'+p_2u=0\equiv(1)$ и $v''+p_1v'+p_2v=0\equiv(1)\to u,v-$ решения уравнения (1).

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Подставляем (10) в (2): $y = e^{(\alpha+\beta i)x}$.

Используем формулу Эйлера:

$$e^{a+bi} = e^{a}(\cos b + i\sin b) \to y = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \to \begin{matrix} u = e^{\alpha x}\cos \beta x = y_1, \\ v = e^{\alpha x}\sin \beta x = y_2 \end{matrix};$$

Покажем, что эти решения являются линейно независимыми:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x}\cos \beta x}{e^{\alpha x}\sin \beta x} = ctg\beta x - функция \to y_1, y_2 - \text{ линейно независимы } \to y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \to$$

$$\to y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

Пример: $y'' - 4y' + 13y = 0$

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac} = \sqrt{4-13} = \sqrt{-9} = 3i \to k_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D}}{9} = 2 \pm 3i \to \alpha = 2; \beta = 3$$

$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$. - общее решение.

с 2011, Фёдоров Павел Борисович

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка: теорема о структуре общего решения.

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = g(x) \qquad (1)$$

Теорема: Если $\bar{y}$ является общим решением соответствующего однородного уравнения, а y^* - частное решение неоднородного уравнения, то их сумма является общим решением уравнения (1), то есть $y = \bar{y} + y^*$. (2)

Доказательство:

1. Докажем, что (2) является решением уравнения (1).
   Для этого подставим (2) в (1).

$$\bar{y}'' + y^{*''} + P_1\bar{y}' + P_1 y^{*'} + P_2\bar{y} + P_2 y^* = g(x)$$

$$(\bar{y}'' + P_1\bar{y}' + P_2\bar{y}) + (y^{*'} + P_1 y^{*'} + P_2 y^*) = g(x)$$

Первая скобка равна нулю, так как $\bar{y}$ является общим решением однородного уравнения с нулевой правой частью.

Вторая скобка равна $g(x)$,так как y^* является частным решением неоднородного уравнения

$\rightarrow g(x) \equiv g(x) \rightarrow$ решение (2) - является частным решением уравнения (1)

(c) 2011, Фёдоров Павел Борисович

2. Докажем общность решения: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$ (3)

Для того чтобы доказать, что решение (3) является общим необходимо подтвердить, что произвольные постоянные C_1, C_2 определяются единственным образом для любых начальных условий:

$$\text{н.у. } y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_{10}$$

Из н.у. следует:

$y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y^*(x_0)$ и $y_{10} = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + y^{*\prime}(x_0)$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1(x_0)C_1 + y_2(x_0)C_2 = y_0 - y^*(x_0) \\ y_1'(x_0)C_1 + y_2'(x_0)C_2 = y_{10} - y^{*\prime}(x_0) \end{cases} \quad (4)$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений методом Кремера:

$$\det A = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = w(x_0)$$

$w(x_0) \neq 0$ по 4 следствию, так как y_1, y_2 – линейно независимые $w(x) \neq 0$, $\forall x \in D$ по 2 следствию $\rightarrow \det A \neq 0 \rightarrow$ система (4) имеет единственное решение $\rightarrow C_1, C_2$ определяются единственным образом для любых н.у. $\rightarrow$ решение (3) является общим решением уравнения (1).

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$y''+p_1y'+p_2y = g(x) \qquad (1),$$

где $p_1 p_2 - const$.

Случаи нахождения частного решения y^*.

1-й случай: Если правая часть имеет вид: $g(x) = A_n(x)e^{\gamma x}$,

то частное решение ищет в виде: $y^* = x^r B_n(x)e^{\gamma x}$

$A_n(x)$ – известный многочлен n-ой степени; γ – известная константа;

$B_n(x)$ – многочлен n-ой степени с неизвестными коэффициентами.

Например:

$A_n(x) = x^2 - 5 \rightarrow B_n(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$

$A_n(x) = 11 \rightarrow B_n(x) = b_0$

$A_n(x) = 1 \rightarrow B_n(x) = b_0$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

$$r = \begin{cases} 0, \textit{если} & \gamma \neq k_1 \neq k_2 \\ 1, \textit{если} & \gamma = k_1; \gamma = k_2 \\ 2, \textit{если} & \gamma = k = k_1 = k_2 \end{cases}$$

Замечание: Для нахождения неизвестных коэффициентов $b_0, b_1, b_2 \ldots$ необходимо подставить y^* в исходное уравнение (1) и приравнять коэффициенты перед одинаковыми степенями x в полученной левой и правой части.

Замечание: При этом должны сократиться все степени $x > n$.

(c) 2011, Фёдоров Павел Борисович

Пример: $y''-2y'+y=e^x$

Общее решение однородного уравнения: $y''-2y'+y=0 \to k^2-2k+1=0 \to (k-1)^2=0 \to k=1.$

$$\bar{y}=e^{kx}(c_1+c_2x) \to \bar{y}=e^x(c_1+c_2x)$$

Частное решение неоднородного уравнения:

$n=0 \to B_0(x)=b_0; \qquad \gamma=1 \to \gamma=k \to r=2;$

$y^*=x^2b_0e^x;$

$y^*{}'=b_0(2xe^x+x^2e^x)=b_0e^x(2x+x^2);$

$y^*{}''=b_0(e^x(2x+x^2)+e^x(2+2x))=b_0e^x(x^2+4x+2).$

Замечание: При подстановке y^* в исходное уравнение, e всегда сокращается.

$$b_0(x^2+4x+2-4x-2x^2+x^2)=1 \to 2b_0=1 \to b_0=\frac{1}{2}; y^*=\frac{x^2e^x}{2} \to$$

$$y=\bar{y}+y^* \to y=e^x(c_1+c_2x+\frac{x^2}{2})$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

2-ой случай: Если правая часть имеет вид: $g(x) = e^{\gamma x}(A_n(x)\cos\delta x + B_m(x)\sin\delta x,)$,

то частное решение ищет в виде: $y^* = x^r e^{\gamma x}(C_l(x)\cos\delta x + D_l(x)\sin\delta x)$.

$A_n(x)$, $B_m(x)$ – известные многочлены степеней m, n. γ, δ – известные константы.

$C_l(x), D_l(x)$ – многочлены с неизвестными коэффициентами в степени $l = \max\{n, m\}$

Замечание: Если $g(x)$ не содержит $e^{\gamma x}$, то $\gamma = 0$.

Замечание: Если $g(x)$ не содержит Cos или Sin, то y^* обязательно содержит и Cos, и Sin.

$$r = \begin{cases} 0, если & \gamma + \delta i \neq \alpha + \beta i \\ 1, если & \gamma + \delta i = \alpha + \beta i. \end{cases}$$

где α, β - действительная и мнимая части комплексных корней характеристического уравнения.

Замечание: Если корни характеристического уравнения действительные, то в этом случае $r = 0$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Для нахождения неизвестных коэффициентов $c_0, c_1, \ldots; d_0, d_1, \ldots,$ решение y^* подставляется в исходное уравнение (1) и приравниваются коэффициенты перед Cos и Sin левой и правой части.

Пример: $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$; н.у. $y(0) = 1; y'(0) = 2.$

Общее решение однородного уравнения:

$k^2 + k - 2 = 0 \to D = 1 + 8 = 9 > 0 \to k_1 = 1, k_2 = -2.$

$\bar{y} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \to \bar{y} = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}.$

Частное решение неоднородного уравнения:

$\gamma = 0;\ \delta = 1 \to r = 0;$ $n = m = 0 \to C_0(x) = c_0,\ D_0(x) = d_0.$

$$y^* = c_0 \cos x + d_0 \sin x;$$

$$y^{*\prime} = -c_0 \sin x + d_0 \cos x;$$

$$y^{*\prime\prime} = -c_0 \cos x - d_0 \sin x.$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

$$c_0\cos x - d_0\sin x - c_0\sin x + d_0\cos x - 2c_0\cos x - 2d_0\sin x = \cos x - 3\sin x;$$

$$\begin{cases} -c_0 + d_0 - 2c_0 = 1 \\ -d_0 - c_0 - 2d_0 = -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} d_0 - 3c_0 = 1 \\ 3d_0 + c_0 = 3 \end{cases} \Big| 3$$

$$10d_0 = 10 \to d_0 = 1 \to c_0 = 0.$$

$$y^* = \sin x \to \quad y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + \sin x; \quad y' = c_1e^x - 2c_2e^{-2x} + \cos x.$$

Из н.у. $\to \begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_1 - 2c_2 + 1 \end{cases} \to \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \to 3c_2 = 0, c_2 = 0 \to c_1 = 1.$

$$y = e^x + \sin x.$$

Замечание: Если правая часть представлена суммой, то решается неоднородное дифференциальное уравнение для каждого слагаемого в отдельности, находятся соответствующие частные решения, а полученные результаты складываются.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Понятие системы и нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Определение: Системой дифференциальных уравнений называется такая система, которая содержит неизвестные функции $y_1, y_2 \ldots y_n$ и производные до n порядка включительно от них.

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \ldots y_n, y_1' \ldots y_n', \ldots y_1^{(n)} \ldots, y_n^{(n)}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, \ldots y_n, y_1' \ldots y_n', \ldots y_1^{(n)} \ldots, y_n^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

Определение: Системой дифференциальных уравнений первого порядка называется системой, если она содержит неизвестные функции и первые производные от них.

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \ldots y_n, y_1' \ldots y_n') = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, \ldots y_n, y_1' \ldots y_n') = 0 \end{cases}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Определение: Нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка в левых частях, которых стоят последовательно первые производные от каждой функции в отдельности, а правые части этих производных не содержит.

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x_1y_1,\ldots,y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x_1y_1,\ldots,y_n) \end{cases}$$

Определение: Общим решением систем называются функции $y_1, y_2 \ldots y_n$, зависящие от аргумента x и n произвольных $C_1C_2\ldots C_n$.

Определение: Частным решением систем называется решение удовлетворяющие n н.у.

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Решение нормальной системы линейного дифференциального уравнения 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом подстановки.

$$y_1' = x + y_1 + y_2 \quad (1); \qquad н.у.: \; y_1(0) = 1,$$
$$y_2' = 2x - 4y_1 - 3y_2 \quad (2); \qquad y_2(0) = 0.$$

Решение:

Дифференцируем левую и правую часть уравнения (1).

$$y_1'' = 1 - y_1' + y_2' \quad (3)$$

Подставляем y_1', y_2' из (1) и (2) в (3):

$$y_1'' = 1 + x + y_1 + y_2 + 2x - 4y_1 - 3y_2 \rightarrow y_1'' = 1 + 3x - 3y_1 - 2y_2 \quad (4).$$

Выразим y_2 из 1-го уравнения: $y_2 = y_1' - y_1 - x \quad (5).$

Подставляем (5) в (4): $y_1'' = 1 + 3x - 3y_1 - 2y_1' + 2y_1 + 2x \rightarrow y_1'' + 5x - y_1 - 2y_1'.$

Переносим в левую часть всё, что касается y_1: $y_1'' + y_1' + y_1 = 5x + 1 \quad (6).$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Уравнение (6) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка.

Составляем характеристическое уравнение: $k^2+2k+1=0 \to (k+1)^2=0 \to k=-1;$

Общее решение однородного уравнения: $\bar{y}_1 = e^{-x}(c_1+c_2x) \quad (7)$

$$\gamma=0, \gamma \neq k \to r=0; \qquad n=1 \to B_1(x)=b_1x+b_0;$$

$$y_1{}^*=b_1x+b_0 \quad (8); \quad y_1{}^{*\prime}=b_1 \quad (9); \quad y_1{}^{*\prime\prime}=0 \quad (10).$$

Подставляем (8), (9), (10) в (6) $\to 2b_1+b_1x+b_0=5x+1 \quad \begin{cases} b_1=5 \\ 2b_1+b_0=1 \to b_0=-9 \end{cases}.$

Подставляем b_0, b_1 в (8) $\qquad y_1{}^*=5x-9 \quad (11).$

$$(7)+(11) \to y_1=e^{-x}(c_1+c_2x)+5x-9 \quad (12).$$

$$y_1{}'=-e^{-x}(c_1+c_2x)+e^{-x}c_2+5 \to y_1{}'=e^{-x}(-c_1-c_2x+c_2)+5 \quad (13).$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

Подставляем (12), (13) в (5)

$$y_2 = e^{-x}(-c_1 - c_2 x + c_2) + 5 - e^{-x}(c_1 + c_2 x) - 5x + 9 \rightarrow$$

$$y_2 = e^{-x}(-2c_1 - 2c_2 x + c_2) - 6x + 14 \quad (14).$$

Из н.у. $\rightarrow 1 = c_1 - 9 \rightarrow c_1 = 10$

$$0 = -2c_1 + c_2 + 14 \rightarrow c_2 = 6$$

Подставляем c_1, c_2 в (12) и (14):

$$y_1 = e^{-x}(10 + 6x) + 5x - 9$$

$$y_2 = e^{-x}(-14 - 12x) - 6x + 14$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович