

Дифференциальные уравнения 2 порядка



Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:

Fedorovkniga.jimdo.com

Общие сведения о дифференциальном уравнении 2-го порядка и теорема Коши для него.

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

Понятие линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Свойства однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

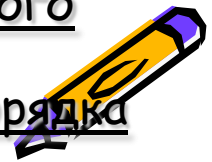
Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка: теорема о структуре общего решения.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Понятие системы и нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Решение нормальной системы линейного дифференциального уравнения 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом подстановки.



Общие сведения о дифференциальном уравнении 2-го порядка и теорема Коши для него.

Дифференциальное уравнение 2-го порядка имеют вид: $y'' = f(x, y, y')$ (1)

т. Коши: Если в уравнении (1) функции $f, f'_y, f'_{y'}$ непрерывны $\forall x, y, y' \in V \in \mathbb{R}^3$, то через каждую точку области V проходит единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее двум начальным условиям.

Замечание: Решением уравнения (1) будет являться бесконечное число поверхностей проходящих через каждую точку области V .

Определение: Общим решением уравнения (1) будет являться функция $y = y(x, c_1, c_2)$ непрерывно зависящая от аргумента x и двух произвольных постоянных определяемых единственным образом для любых н.у.

Определение: Частным решением уравнения (1) называется функция $y(x, c_{10}, c_{20})$ удовлетворяющая двум н.у. $y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_{10}$.

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.



Первый случай: Признаком этого случая является отсутствие в явном виде в уравнении (1) переменной y , то есть дифференциальное уравнение имеет вид: $y'' = f(x, y')$.

$$\text{Замена: } z(x) = y' \quad (2)$$

$$\rightarrow z' = y'' \quad z' = f(x, z) \quad (3)$$

Решая дифференциальное уравнение первого порядка (3), находим функцию $z = z(x, c_1)$. Подставляя $z = z(x, c_1)$ в дифференциальное уравнение первого порядка (2) и решая его, находим искомую функцию $y = y(x, c_1, c_2)$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Пример: $y'' + \frac{y'}{x} = x$

$z' + \frac{z}{x} = x$ - линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

$$P(x) = \frac{1}{x}; \quad g(x) = x$$

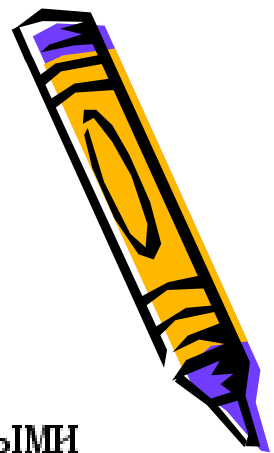
Используем формулу: $z = \left[\int g(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] e^{-\int P(x)dx}$

$$z = \left[\int x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \left[\int \underbrace{x e^{\ln x}} dx + C \right] \underbrace{e^{-\ln x}}_{\frac{1}{x}} = \left[\int x^2 dx + C \right] \frac{1}{x} = \left[\frac{x^3}{3} + C \right] \frac{1}{x}$$

$$z = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} \rightarrow$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} \rightarrow \int dy = \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} \right) dx \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2 \cdot \text{общее решение.}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Второй случай: В этом случае уравнение (1) не содержит в явном виде переменной x , то есть имеет вид $y'' = f(y, y')$.

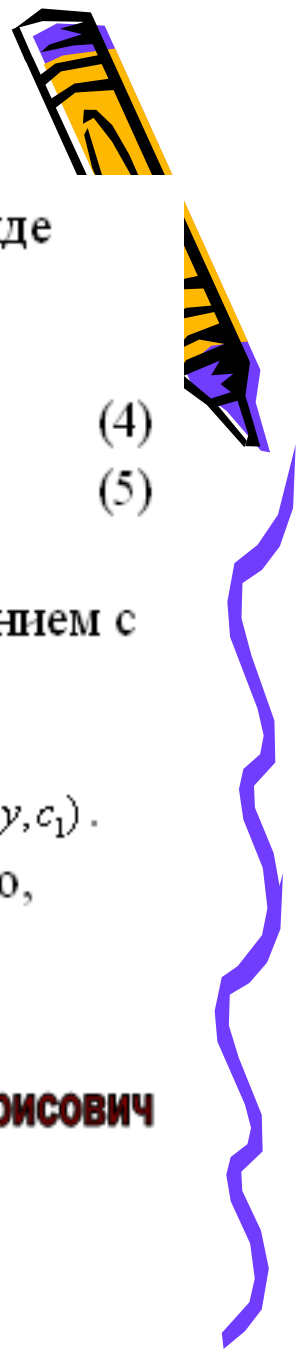
Замена: $z = z(y) = y'$ (4)

$$y'' = z'y' \rightarrow y'' = z'z \quad z'z = f(y, z) \quad (5)$$

Замечание: Если уравнение (5) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, то $z' = \frac{dz}{dy}$.

Решая дифференциальное уравнение (5), находим функцию $z = z(y, c_1)$.
Подставляя $z = z(y, c_1)$ в дифференциальное уравнение (4) и решая его, находим $y = y(x, c_1, c_2)$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Пример: $y'' = \frac{e^y}{3y'}$ ну. $y(-3) = 0$; $y'(-3) = 1$

$$z'z = \frac{e^y}{3z} \rightarrow$$

$\rightarrow z' = \frac{e^y}{3z^2}$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

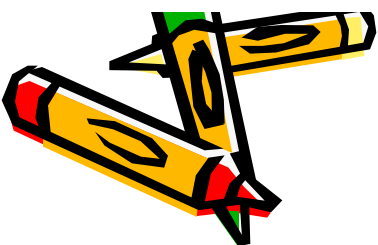
$$\frac{dz}{dy} = \frac{e^y}{3z^2} \rightarrow 3 \int z^2 dz = \int e^y dy \rightarrow z^3 = e^y + C_1 \rightarrow z = \sqrt[3]{e^y + C_1}$$

$y' = \sqrt[3]{e^y + C_1}$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{e^y + C_1} \quad \int \frac{dy}{\sqrt[3]{e^y + C_1}} = \int dx$$

Общего решения дифференциальное уравнение не имеет, т.к. интеграл левой части не имеет первообразный в элементарных функциях.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Из н.у. следует $1 = \sqrt[3]{e^0 + C_1} \rightarrow C_1 = 0$

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{e^y}} = x_1 + C_1 \rightarrow \int e^{-\frac{y}{3}} dy = x + C_2 \rightarrow -3e^{-\frac{y}{3}} = x + C_2 \rightarrow e^{-\frac{y}{3}} = \frac{x + C_2}{-3}$$

$$-\frac{y}{3} = \ln \frac{x + C_2}{-3} \rightarrow y = -3 \ln \frac{x + C_2}{-3}$$

$$\text{Из н.у. } 0 = -3 \ln \frac{-3 + C_2}{-3} \quad 1 - \frac{C_2}{3} = 1$$

$$C_2 = 0 \quad y = -3 \ln\left(-\frac{x}{2}\right) \quad \forall x \leq 0 \text{ - частное решение.}$$



© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Понятие линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.



Определение: Дифференциальное уравнение 2-го порядка называется линейным, если коэффициенты перед функцией производными от неё являются функциями только аргумента x , и функция её производной входит в уравнение первой степени.

$$a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y + a_4(x) = 0 \mid a_1(x) \neq 0$$

Замечание: $a_1(x) \neq 0$ т.к. в противном случае получится дифференциальное уравнение 1-го порядка: $a_2(x)y' + a_3(x)y + a_4(x) = 0$

$$\rightarrow y'' + \frac{a_2(x)}{a_1(x)}y' + \frac{a_3(x)}{a_1(x)}y = -\frac{a_4(x)}{a_1(x)} \rightarrow$$

$$\rightarrow y + p_1(x)y' + p_2(x)y = g(x). \quad (1).$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Определение: Линейное дифференциальное уравнение называется однородным, если правая часть в уравнении (1) равна нулю и неоднородным в противном случае.

Определение: Два частных решения в уравнении (1) называются линейно зависимыми, если их отношение равно константе и независимыми, если их отношение - функция.

Определение: Два частных линейно независимых решения образуют фундаментальную систему уравнения (1).

Определение: Определитель 2-го порядка составленный из 2-х частных решений и производных от них называется определителем Вронского.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Свойства однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Первое свойство: сумма двух частных решений

$$y'' + P_1 y' + P_2 y = 0. \quad (1)$$

Свойство: Сумма двух частных решений уравнения (1) так же является решением этого уравнения.

Доказательство:

y_1, y_2 - частные решения уравнения (1).

Требуется доказать: что $y = y_1 + y_2$ (2) - частное решение уравнения (1)

Подставляем частное решение y_1, y_2 в уравнение (1)

$$+ \begin{cases} y_1'' + P_1 y_1' + P_2 y_1 = 0 \\ y_2'' + P_1 y_2' + P_2 y_2 = 0 \end{cases}$$

$$(y_1 + y_2)'' + P_1 (y_1 + y_2)' + P_2 (y_1 + y_2) = 0$$

Каждая из скобок заменяется формулой (2)

$$y'' + P_1 y' + P_2 y = 0 \equiv (1) \rightarrow$$

решение (2) является частным решением уравнения (1).



Второе свойство: умножение решения на константу.

Свойство: Произведение частного решения на константу также является частным решением уравнения (1).

Доказательство:

y_1 - частное решение уравнения (1).

Требуется доказать: $y = cy_1$ (3) - частное решение (1).

Подставляем (3) в (1):

$cy_1'' + cp_1y_1' + cp_2y_1 = 0 \mid c \rightarrow y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1 = 0 \equiv (1) \rightarrow (3)$ - частное решение уравнения (1).

Следствие 1 из 1-го и 2-го свойства:

Линейная комбинация 2-х частных решений уравнения (1) также является частным решением этого уравнения: $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Третье свойство: формула Остроградского - Лиувилля.

Свойство: Пусть y_1, y_2 - частное решение уравнения (1). Подставляем y_1, y_2 в уравнение (1).

$$+ \begin{cases} y_1'' + P_1 y_1' + P_2 y_1 = 0 & (-y_2) \\ y_2'' + P_1 y_2' + P_2 y_2 = 0 & (y_1) \end{cases}$$

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + P_1 (y_1 y_2' - y_2 y_1') + P_2 (y_1 y_2 - y_2 y_1) = 0.$$

Вычислим определитель Вронского

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \rightarrow \text{вторая скобка является определителем Вронского.}$$

Вычислим производную от определителя Вронского

$$w' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \rightarrow \text{первая скобка является производной от определителя Вронского.}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





$w' + P_1 w = 0 \rightarrow w' = -P_1 w$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dw}{dx} = -P_1 w \rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dw}{w} = - \int_{x_0}^x P_1 dx$$

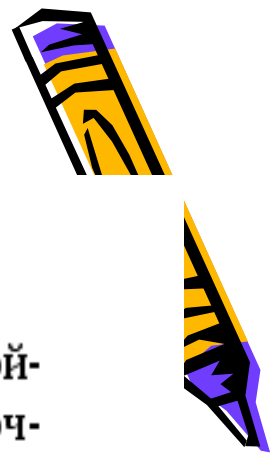
($x_0 - \text{const}$, $x_0, x \in D$ - область решения дифференциального уравнения)

$$\ln w(x) \Big|_{x_0}^x = - \int_{x_0}^x P_1 dx \rightarrow \ln w(x) - \ln w(x_0) = - \int_{x_0}^x P_1 dx$$

$$\ln \frac{w(x)}{w(x_0)} = - \int_{x_0}^x P_1 dx \rightarrow w(x) = w(x_0) e^{- \int_{x_0}^x P_1(x) dx} \quad \text{- формула Остроградского - Лиувилля.$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Следствия из третьего свойства.

Следствие 2: Если определитель Вронского не равен нулю в одной какой-то точке области решения, то он не равен нулю и во всех точках этой области.

Следствие 3: Определитель Вронского равен нулю, если он составлен из линейно зависимых решений.

$$\frac{y_1}{y_2} = C \rightarrow y_1 = y_2 C \quad w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cy_2 & y_2 \\ Cy_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

Следствие 4: Определитель Вронского не равен нулю, если он составлен из линейно независимых решений.





Четвертое свойство: Структура общего решения.

Свойство: Если y_1, y_2 - фундаментальная система решений уравнения (1), то $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ (4) является общим решением этого уравнения.

Доказательство:

Решение (4) является частным решением уравнения (1), что следует из следствия 1. Для доказательства общности решения необходимо подтвердить, что c_1 и c_2 определяются единственным образом из 2-х производных н.у.: $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_{10}$

Удовлетворяем решение (4) начальным условиям:
$$\begin{cases} y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) \\ y_{10} = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) \end{cases} \quad (5)$$

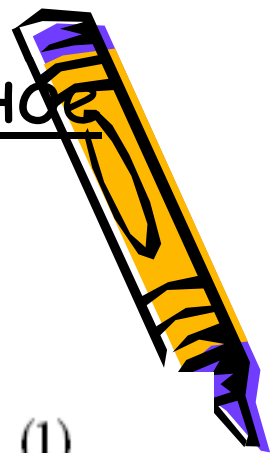
Получим систему линейных алгебраических уравнений (5) относительно c_1, c_2 , которую решаем методом Крамера: $\det A = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$

$W(x_0) \neq 0$ по 4-му следствию т.к. по условию y_1, y_2 - линейно независимые.

$W(x) \neq 0, \forall x \in D$, по 2-му следствию \rightarrow система (5) имеет единственное решение $\rightarrow c_1, c_2$ определяются единственным образом для любых н.у. \rightarrow решение (4) является общим решением уравнения (1).



Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.



$$y'' + P_1 y' + P_2 y = 0 \quad (1)$$
$$(P_1, P_2 - \text{const})$$

Решение уравнения (1) ищем в следующем виде: $y = e^{kx}$ (2)

где k - неизвестная константа.

Найдем производные: $y' = ke^{kx}$ (3) $y'' = k^2 e^{kx}$ (4)

Подставляем (2,3,4) в (1):

$$k^2 e^{kx} + P_1 k e^{kx} + P_2 e^{kx} = 0 \quad | : e^{kx} \rightarrow$$
$$k^2 + P_1 k + P_2 = 0 \quad \cdot$$

характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (1).

Вычислим дискриминант: $D = P_1^2 - 4P_2$



Корни характеристического уравнения действительные, разные.

$$D > 0 \rightarrow k_{1,2} = \frac{-P_1 \pm \sqrt{D}}{2}$$

Подставляем $k_{1,2}$ в решение (2) получаем два частных решения:

$$y_1 = e^{k_1 x}; \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

Покажем, что эти два решения линейно независимы

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{x(k_1 - k_2)} - \text{функция, так как } k_1 \neq k_2 \rightarrow$$

$\rightarrow y_1, y_2$ - линейно независимые решения

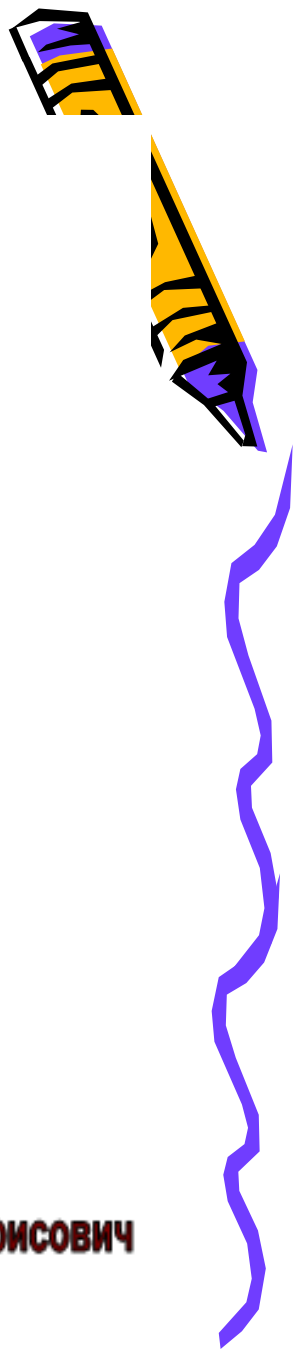
$$\rightarrow y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \rightarrow y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Пример: $y'' - 7y' + 6y = 0$

$$k^2 - 7k + 6 = 0 \rightarrow D = 49 - 24 > 0 \rightarrow k_1 = \frac{7+5}{2} = 6; \quad k_2 = \frac{7-5}{2} = 1$$

$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x$ - общее решение.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Корни характеристического уравнения действительные, равные.

$$D = 0 \rightarrow k = -\frac{P_1}{2} \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2) получим одно частное решение $y_1 = e^{kx}$. Второе частное решение будем искать в следующем виде: $y = u(x)e^{kx}$ (6)

$$y' = u'e^{kx} + uke^{kx} = e^{kx}(u' + uk) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} y'' &= ke^{kx}(u' + uk) + e^{kx}(u'' + ku') = \\ &= e^{kx}(u'' + 2ku' + uk^2) \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляем (6,7,8) в уравнение (1) и сокращаем на e^{kx} .

$$u'' + 2ku' + uk^2 + P_1u' + P_1ku + P_2u = 0$$

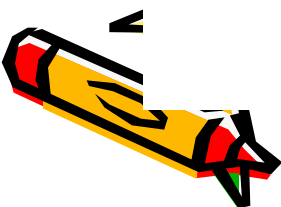
$$u'' + u'(2k + P_1) + u(k^2 + P_1k + P_2) = 0$$

Вторая скобка равна нулю, так как она является левой частью характеристического уравнения. Подставим в первую скобку k из (5)

$$u'' + u'(2(-\frac{P_1}{2}) + P_1) = 0 \rightarrow u'' = 0 \rightarrow u' = C_1 - \text{дифференциальное уравнение}$$

первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{du}{dx} = C_1 \rightarrow \int du = C_1 \int dx \rightarrow u = C_1x + C_2$$





Для получения частного решения зададим произвольные постоянные

$$C_1 = 1; C_2 = 0 \rightarrow u = x \quad (9)$$

Подставляем (9) в (6) $y_2 = xe^{kx}$.

Покажем, что эти решения линейно независимы:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{kx}}{xe^{kx}} = \frac{1}{x} \text{ - функция } \rightarrow y_1, y_2 \text{ - линейно независимы}$$

$$\rightarrow y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \rightarrow y = e^{kx} (C_1 + C_2 x)$$

Пример: $y'' - 4y' + 4y = 0$ н.у. $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \rightarrow (k - 2)^2 = 0 \rightarrow k = 2 \rightarrow y = e^{2x} (C_1 + C_2 x) \rightarrow$$

$$y' = 2e^{2x} (C_1 + C_2 x) + e^{2x} C_2 \text{ - общее решение.}$$

$$\text{Из н.у. } \rightarrow 1 = C_1 \rightarrow C_1 = 1 \quad 0 = 2C_1 + C_2 \rightarrow C_2 = -2 \rightarrow$$

$$y = e^{2x} (1 - 2x) \text{ - частное решение.}$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Корни характеристического уравнения комплексные.

$$D < 0 \rightarrow k_{1,2} = \frac{-p_1 \pm \sqrt{|D|}i}{2}, (i = \sqrt{-1}); \rightarrow k_{1,2} = -\frac{p_1}{2} \pm \frac{\sqrt{|D|}}{2}i.$$

Обозначим $\alpha = \frac{-p_1}{2}$ - действительная часть комплексного числа, $\beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2}$ - мнимая часть этого числа.

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i. \quad (10)$$

Лемма: Если $y = u(x) + v(x)i$ (11) является решением уравнения (1), то действительная часть $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$ этого решения в отдельности также являются решением уравнения (1).

Доказательство:

подставляем решение (11) в уравнение (1).

$$u'' + v''i + p_1u' + p_1v'i + p_2u + p_2vi = 0; (u'' + p_1u' + p_2u) + i(v'' + p_1v' + p_2v) = 0.$$

Замечание: Комплексное число равно нулю, если одновременно равны нулю его действительные и мнимые части

$\rightarrow u'' + p_1u' + p_2u = 0 \equiv (1)$ и $v'' + p_1v' + p_2v = 0 \equiv (1) \rightarrow u, v$ - решения уравнения (1).



Подставляем (10) в (2): $y = e^{(\alpha+\beta i)x}$.

Используем формулу Эйлера:

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b) \rightarrow y = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \rightarrow \begin{cases} u = e^{\alpha x} \cos \beta x = y_1, \\ v = e^{\alpha x} \sin \beta x = y_2 \end{cases}$$

Покажем, что эти решения являются линейно независимыми:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \operatorname{ctg} \beta x - \text{функция} \rightarrow y_1, y_2 - \text{линейно независимы} \rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \rightarrow \\ \rightarrow y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

Пример: $y'' - 4y' + 13y = 0$

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac} = \sqrt{4 - 13} = \sqrt{-9} = 3i \rightarrow k_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D}}{a} = \frac{2 \pm 3i}{1} = 2 \pm 3i \rightarrow \alpha = 2; \beta = 3$$

$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$. - общее решение.



Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка: теорема о структуре общего решения.

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = g(x) \quad (1)$$

Теорема: Если \bar{y} является общим решением соответствующего однородного уравнения, а y^* - частное решение неоднородного уравнения, то их сумма является общим решением уравнения (1), то есть $y = \bar{y} + y^*$. (2)

Доказательство:

1. Докажем, что (2) является решением уравнения (1).

Для этого подставим (2) в (1).

$$\begin{aligned} \bar{y}'' + y^{*''} + P_1\bar{y}' + P_1y^{*'} + P_2\bar{y} + P_2y^* &= g(x) \\ (\bar{y}'' + P_1\bar{y}' + P_2\bar{y}) + (y^{*''} + P_1y^{*'} + P_2y^*) &= g(x) \end{aligned}$$

Первая скобка равна нулю, так как \bar{y} является общим решением однородного уравнения с нулевой правой частью.

Вторая скобка равна $g(x)$, так как y^* является частным решением неоднородного уравнения

$\rightarrow g(x) \equiv g(x) \rightarrow$ решение (2) - является частным решением уравнения (1)



2. Докажем общность решения: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$ (3)

Для того чтобы доказать, что решение (3) является общим необходимо подтвердить, что произвольные постоянные C_1, C_2 определяются единственным образом для любых начальных условий:

$$\text{н.у. } y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_{10}$$

Из н.у. следует:

$$y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y^*(x_0) \text{ и } y_{10} = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + y^{*'}(x_0)$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1(x_0)C_1 + y_2(x_0)C_2 = y_0 - y^*(x_0) \\ y_1'(x_0)C_1 + y_2'(x_0)C_2 = y_{10} - y^{*'}(x_0) \end{cases} \quad (4)$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений методом Кремера:

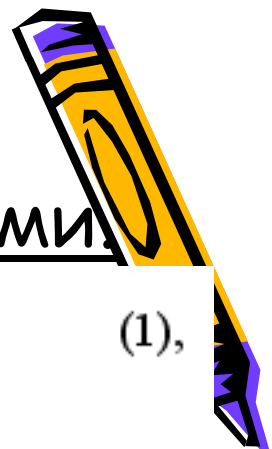
$$\det A = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = w(x_0)$$

$w(x_0) \neq 0$ по 4 следствию, так как y_1, y_2 - линейно независимые $w(x) \neq 0$,
 $\forall x \in D$ по 2 следствию $\rightarrow \det A \neq 0 \rightarrow$ система (4) имеет единственное решение $\rightarrow C_1, C_2$ определяются единственным образом для любых н.у. \rightarrow решение (3) является общим решением уравнения (1).

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами



$$y'' + p_1 y' + p_2 y = g(x) \quad (1),$$

где $p_1, p_2 - \text{const.}$

Случай нахождения частного решения y^* .

1-й случай: Если правая часть имеет вид: $g(x) = A_n(x)e^{\gamma x}$,

то частное решение ищет в виде: $y^* = x^r B_n(x)e^{\gamma x}$

$A_n(x)$ – известный многочлен n -ой степени; γ – известная константа;

$B_n(x)$ – многочлен n -ой степени с неизвестными коэффициентами.

$$A_n(x) = x^2 - 5 \rightarrow B_n(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

Например: $A_n(x) = 11 \rightarrow B_n(x) = b_0$

$$A_n(x) = 1 \rightarrow B_n(x) = b_0$$

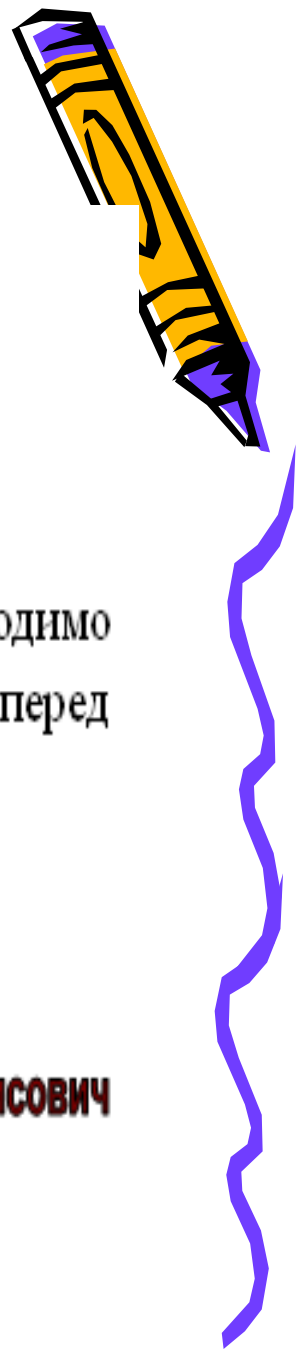


$$r = \begin{cases} 0, \text{если} & \gamma \neq k_1 \neq k_2 \\ 1, \text{если} & \gamma = k_1; \gamma = k_2 \\ 2, \text{если} & \gamma = k = k_1 = k_2 \end{cases}$$

Замечание: Для нахождения неизвестных коэффициентов $b_0, b_1, b_2 \dots$ необходимо подставить y^* в исходное уравнение (1) и приравнять коэффициенты перед одинаковыми степенями x в полученной левой и правой части.

Замечание: При этом должны сократиться все степени $x > n$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Пример: $y'' - 2y' + y = e^x$

Общее решение однородного уравнения:

$$y'' - 2y' + y = 0 \rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \rightarrow (k - 1)^2 = 0 \rightarrow k = 1.$$

$$\bar{y} = e^{kx}(c_1 + c_2x) \rightarrow \bar{y} = e^x(c_1 + c_2x)$$

Частное решение неоднородного уравнения:

$$n = 0 \rightarrow B_0(x) = b_0; \quad \gamma = 1 \rightarrow \gamma = k \rightarrow r = 2;$$

$$y^* = x^2 b_0 e^x;$$

$$y^{*'} = b_0(2xe^x + x^2e^x) = b_0e^x(2x + x^2);$$

$$y^{*''} = b_0(e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x)) = b_0e^x(x^2 + 4x + 2).$$

Замечание: При подстановке y^* в исходное уравнение, e всегда сокращается.

$$b_0(x^2 + 4x + 2 - 4x - 2x^2 + x^2) = 1 \rightarrow 2b_0 = 1 \rightarrow b_0 = \frac{1}{2}; y^* = \frac{x^2 e^x}{2} \rightarrow$$

$$y = \bar{y} + y^* \rightarrow y = e^x(c_1 + c_2x + \frac{x^2}{2})$$





2-ой случай: Если правая часть имеет вид: $g(x) = e^{\gamma x} (A_n(x) \cos \delta x + B_m(x) \sin \delta x)$,

то частное решение ищет в виде: $y^* = x^r e^{\gamma x} (C_l(x) \cos \delta x + D_l(x) \sin \delta x)$.

$A_n(x), B_m(x)$ – известные многочлены степеней n, m . γ, δ – известные константы.

$C_l(x), D_l(x)$ – многочлены с неизвестными коэффициентами в степени $l = \max\{n, m\}$

Замечание: Если $g(x)$ не содержит $e^{\gamma x}$, то $\gamma = 0$.

Замечание: Если $g(x)$ не содержит \cos или \sin , то y^* обязательно содержит и \cos , и \sin .

$$r = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma + \delta i \neq \alpha + \beta i \\ 1, & \text{если } \gamma + \delta i = \alpha + \beta i. \end{cases}$$

где α, β - действительная и мнимая части комплексных корней характеристического уравнения.

Замечание: Если корни характеристического уравнения действительные, то в этом случае $r = 0$.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович





Для нахождения неизвестных коэффициентов $c_0, c_1, \dots; d_0, d_1, \dots$, решение y^* подставляется в исходное уравнение (1) и приравниваются коэффициенты перед \cos и \sin левой и правой части.

Пример: $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$; н.у. $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Общее решение однородного уравнения:

$$k^2 + k - 2 = 0 \rightarrow D = 1 + 8 = 9 > 0 \rightarrow k_1 = 1, k_2 = -2.$$

$$\bar{y} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \rightarrow \bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения:

$$\gamma = 0; \delta = 1 \rightarrow r = 0;$$

$$n = m = 0 \rightarrow C_0(x) = c_0, D_0(x) = d_0.$$

$$y^* = c_0 \cos x + d_0 \sin x,$$

$$y^{*'} = -c_0 \sin x + d_0 \cos x,$$

$$y^{*''} = -c_0 \cos x - d_0 \sin x.$$





$$c_0 \cos x - d_0 \sin x - c_0 \sin x + d_0 \cos x - 2c_0 \cos x - 2d_0 \sin x = \cos x - 3 \sin x;$$

$$\begin{cases} -c_0 + d_0 - 2c_0 = 1 \\ -d_0 - c_0 - 2d_0 = -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} d_0 - 3c_0 = 1 \\ 3d_0 + c_0 = 3 \end{cases} \Big| \cdot 3$$

$$10d_0 = 10 \rightarrow d_0 = 1 \rightarrow c_0 = 0.$$

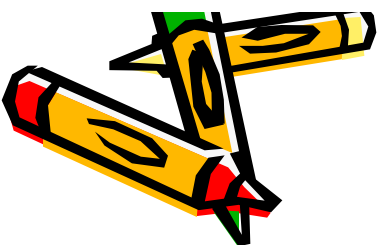
$$y^* = \sin x \rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x; \quad y' = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x} + \cos x.$$

$$\text{Из н.у.} \rightarrow \begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_1 - 2c_2 + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow 3c_2 = 0, c_2 = 0 \rightarrow c_1 = 1.$$

$$y = e^x + \sin x.$$

Замечание: Если правая часть представлена суммой, то решается неоднородное дифференциальное уравнение для каждого слагаемого в отдельности, находятся соответствующие частные решения, а полученные результаты складываются.

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Понятие системы и нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка.



Определение: Системой дифференциальных уравнений называется такая система, которая содержит неизвестные функции y_1, y_2, \dots, y_n и производные до n порядка включительно от них.

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)}) = 0 \\ \dots \\ F_n(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

Определение: Системой дифференциальных уравнений первого порядка называется системой, если она содержит неизвестные функции и первые производные от них.

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0 \\ \dots \\ F_n(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0 \end{cases}$$





Определение: Нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка в левых частях, которых стоят последовательно первые производные от каждой функции в отдельности, а правые части этих производных не содержит.

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Определение: Общим решением систем называются функции y_1, y_2, \dots, y_n , зависящие от аргумента x и n произвольных C_1, C_2, \dots, C_n .

Определение: Частным решением систем называется решение удовлетворяющие n н.у.

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases}$$



Решение нормальной системы линейного
дифференциального уравнения 1-го
порядка с постоянными коэффициентами
методом подстановки.

$$y_1' = x + y_1 + y_2 \quad (1); \quad \text{н.у.: } y_1(0) = 1,$$
$$y_2' = 2x - 4y_1 - 3y_2 \quad (2); \quad y_2(0) = 0.$$

Решение:

Дифференцируем левую и правую часть уравнения (1).

$$y_1'' = 1 - y_1' + y_2' \quad (3)$$

Подставляем y_1', y_2' из (1) и (2) в (3):

$$y_1'' = 1 + x + y_1 + y_2 + 2x - 4y_1 - 3y_2 \rightarrow y_1'' = 1 + 3x - 3y_1 - 2y_2 \quad (4).$$

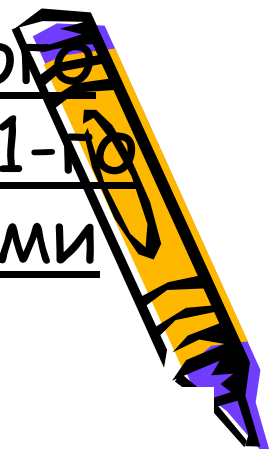
Выразим y_2 из 1-го уравнения:

$$y_2 = y_1' - y_1 - x \quad (5).$$

Подставляем (5) в (4): $y_1'' = 1 + 3x - 3y_1 - 2y_1' + 2y_1 + 2x \rightarrow y_1'' + 5x - y_1 - 2y_1'$.

Переносим в левую часть всё, что касается y_1 : $y_1'' + y_1' + y_1 = 5x + 1 \quad (6).$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Уравнение (6) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка.

Составляем характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 1 = 0 \rightarrow (k+1)^2 = 0 \rightarrow k = -1$;

Общее решение однородного уравнения: $\bar{y}_1 = e^{-x}(c_1 + c_2x)$ (7)

$$\gamma = 0, \gamma \neq k \rightarrow r = 0; \quad n = 1 \rightarrow B_1(x) = b_1x + b_0;$$

$$y_1^* = b_1x + b_0 \quad (8); \quad y_1^{*'} = b_1 \quad (9); \quad y_1^{*''} = 0 \quad (10).$$

Подставляем (8), (9), (10) в (6) $\rightarrow 2b_1 + b_1x + b_0 = 5x + 1$ $\begin{cases} b_1 = 5 \\ 2b_1 + b_0 = 1 \rightarrow b_0 = -9 \end{cases}$

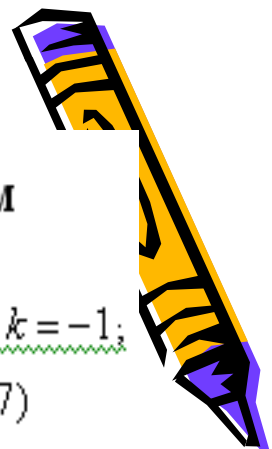
Подставляем b_0, b_1 в (8)

$$y_1^* = 5x - 9 \quad (11).$$

$$(7) + (11) \rightarrow y_1 = e^{-x}(c_1 + c_2x) + 5x - 9 \quad (12).$$

$$y_1' = -e^{-x}(c_1 + c_2x) + e^{-x}c_2 + 5 \rightarrow y_1' = e^{-x}(-c_1 - c_2x + c_2) + 5 \quad (13).$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович



Подставляем (12), (13) в (5)

$$y_2 = e^{-x}(-c_1 - c_2x + c_2) + 5 - e^{-x}(c_1 + c_2x) - 5x + 9 \rightarrow$$

$$y_2 = e^{-x}(-2c_1 - 2c_2x + c_2) - 6x + 14 \quad (14).$$

Из н.у. $\rightarrow 1 = c_1 - 9 \rightarrow c_1 = 10$

$$0 = -2c_1 + c_2 + 14 \rightarrow c_2 = 6$$

Подставляем c_1, c_2 в (12) и (14):

$$y_1 = e^{-x}(10 + 6x) + 5x - 9$$

$$y_2 = e^{-x}(-14 - 12x) - 6x + 14$$

© 2011, Фёдоров Павел Борисович

