Дифференциальные уравнения 1 порядка

Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Общие сведения о дифференциальных уравнениях

Определение: дифференциальным уравнением называется такое уравнение, которое составлено относительно неизвестной функции и производных от неё.

Определение: Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящие в это дифференциальное уравнение.

Определение: дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если оно составлено относительно неизвестной функции одного переменного.

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad y = y(x)$$

Например; дифференциальное уравнение третьего порядка: $(y'')^5 + y''' = x$

Определение: дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных, если оно составлено относительно функции нескольких переменных.

$$F\left(x, y, z(x,y), \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ldots\right) = 0$$

Например: уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

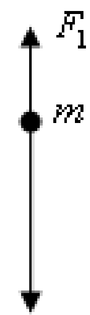
Определение: Решением дифференциального уравнением называется неизвестная функция, обращающая это уравнение в тождество.

Определение: Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Задача на составление дифференциального уравнения.

Дано: Материальная точка массой m брошена с некоторой высоты со скоростью V_0, в среде с коэффициентом сопротивления k.

Требуется составить дифференциальное уравнение движения материальной точки.



На материальную точку действуют: силы сопротивления среды $F_1 = mg$ и силы тяжести $F_2 = kV$. По третьему закону Ньютона: $F_1 - F_2 = ma$, где ускорение вычисляется через скорость: $a = V'$.

Тогда: $mg - kV = m\,V' \;:\; m$

$\rightarrow \quad V' + \frac{k}{m}V = g$ - дифференциальное уравнение движения материальной точки.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и теорема Коши для него

Обыкновенное уравнение первого порядка имеют вид: $y' = f(x, y)$ (1)

т. Коши: Если в уравнении (1) функции f, f'_y являются непрерывными $\forall x \in D \in R$, то через каждую точку области D проходит единственное решение.

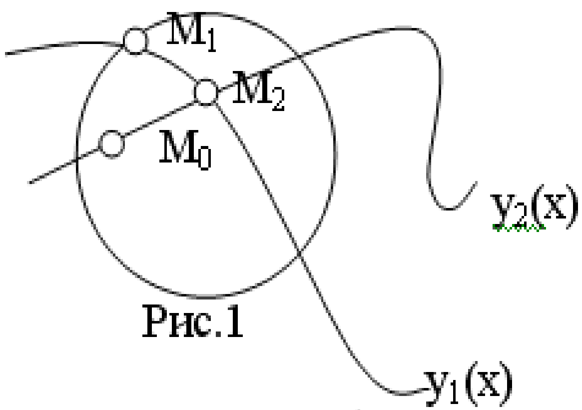


Рис.1

В точке M_2 (Рис.1) походят 2 решения, что противоречит т. Коши, значит решения уравнения (1) представляют собой непересекающиеся линии (Рис.2).

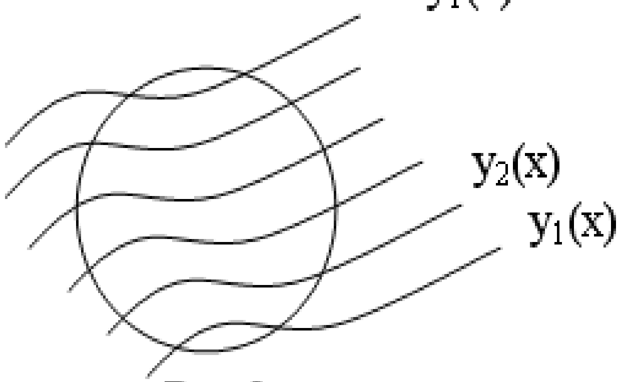


Рис.2

Т.к. область содержит бесчисленное множество точек, то уравнение (1) имеет бесчисленное множество решений.

Например: $y' = g$ - const; $\frac{dy}{dx} = g \to dy = gdx$; $\int dy = \int gdx$; $y = gx + c$.

Вывод: решение уравнения (1) отличаются друг от друга на величину произвольной постоянной C.

Определение: решение $y = y(x;c)$ непрерывно зависящее от аргумента x и произвольной постоянной c, определённой единственным образом для каждой точки области, называется общим решением уравнения (1).

Определение: условие прохождения решения через заданную точку области называется начальным условием (н.у.).

Замечание: Количество н.у. определяется порядком дифференциального уравнения.

Для дифференциального уравнения первого порядка н.у. имеет вид: $y(x_0) = y_0$

Определение: решение $y = y(x, c_0)$ удовлетворяющее н.у. называется частным решением.

Например: н.у. $y(0) = \vartheta_0$; $\vartheta_0 = g \cdot 0 + c \to c = \vartheta_0$; $y = \vartheta_0 + gx$.

Определение: Решение дифференциального уравнения представленное в виде неявной функции называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Например: $y^3 + sin(y) + e^y - x = 0$.

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

Определение: дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, если правая часть его представлена в виде произведения двух функций, отдельно зависящих от x и y:

$$y' = f_1(x) f_2(y)$$

Замечание: если правая часть содержит только $f_1(x)$, или $f_2(y)$, или $const$, то это дифференциальное уравнение также будет являться частным случаем дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Порядок решения:

1. $y' = \frac{dy}{dx} \to \frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$

2. Переносим всё, что касается y в левую, что x в правую часть:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

3. Интегрируем левую и правую части: $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$

Пример: $y' = 2\frac{y}{x}$

$$y' = 2y\frac{1}{x} \to \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \to \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}dx \to \quad \ln y = 2\ln x + c .$$

Замечание: Произвольную постоянную c можно представить через любое выражение или функцию с этой постоянной.

$$\ln y = \ln x^2 + \ln c \to \quad \ln y = \ln cx^2 \to \quad y = cx^2$$ - общее решение

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Определение: Функция $f(x,y)$ называется однородной, если для неё выполняется следующее условие $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ $(\lambda \neq 0.1)$ n-порядок однородности функции.

Например: $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y^2) = \lambda^2 (x^2 + y^2) = \lambda^2 f(x,y) \rightarrow$ однородная функция второго порядка.

Определение: дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если правая часть этого уравнения представлена однородной функцией нулевого порядка:

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$$

Порядок решения:

1. $y' = f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$

Замечание: Если дифференциальное уравнение содержит $\dfrac{y}{x}$, то это является признаком неоднородности.

2. $\lambda = \dfrac{1}{x} \to y' = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

3. Замена $u = u(x) = \dfrac{y}{x} \to \qquad y = u \cdot x \to \; y' = u'x + ux' \to \qquad y' = u'x + u$

Замечание: $y = u(x) \cdot x$ – является формулой обратной замены.

4. $u'x + u = \varphi(u) \to u' = [\varphi(u) - u]\dfrac{1}{x}$

Замечание: Однородное дифференциальное уравнение первого порядка всегда приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

5. $\dfrac{du}{u} = \dfrac{\varphi(u) - u}{x} \to \int \dfrac{du}{\varphi(u) - u} = \int \dfrac{dx}{x}$

Пример: $y' = \dfrac{2y}{x}$

$$u = \frac{y}{x}; \quad y' = u'x + u \to u'x + u = 2u \to u' = \frac{u}{x} \to \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \to \ln u = \ln x + \ln c \to u = cx \to y = ux = cx^2$$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Определение: Дифференциальное уравнение называется линейным, если коэффициенты перед неизвестной функцией и её производной являются функциями одного переменного, а неизвестная функция и её производная входит в уравнение первой степени.

$$a_1(x)y'+a_2(x)y+a_3(x)=0 \;\Big|: a_1(x)\neq 0$$

Замечание: $a_1(x)\neq 0$ т.к. в противном случае мы получим не дифференциальное уравнение, а алгебраическое уравнение: $a_2(x)y+a_3(x)=0$

$$y'+\frac{a_2(x)}{a_1(x)}y=-\frac{a_3(x)}{a_1(x)}\to$$

$$y'+p(x)y=g(x) \qquad (1).$$

Вывод формулы решения

В уравнении (1) временно примем правую часть равную нулю:

$y' + p(x)y = 0 \rightarrow y' = -p(x)y \rightarrow$ дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \rightarrow \ln y = -\int p(x)dx + \ln c \rightarrow \frac{y}{c} = e^{-\int p(x)dx} \rightarrow y = c(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$\rightarrow y = c(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (2)$$

Замечание: Т.к. в уравнении (1) правая часть неравна нулю и является функцией от x, то в решении (2) c является функцией от x.

Для того чтобы удовлетворить решение (2) уравнению (1), найдём производную от этого решения: $y' = c(x)e^{-\int p(x)dx} + c(x)e^{-\int p(x)dx}(-\int p(x)dx) \rightarrow;$

$$y' = c'(x)e^{-\int p(x)dx} + c(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)). \qquad (3)$$

Подставляем (2) и (3) в (1):

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx}+c(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)+p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}=g(x)\,;\ c'(x)e^{-\int p(x)dx}=g(x)\to$$

$\to c'(x)=g(x)e^{\int p(x)dx}\to$ дифференциальное уравнение разделяющимися переменными

$$\to\frac{dc}{dx}=g(x)e^{\int p(x)dx}\to\int dc=\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx\to c(x)=\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx+c \qquad (4)$$

Подставляем (4) в (2): $y=(\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx+c)e^{-\int p(x)dx}$ (5)

Например: $\vartheta'+\frac{k}{m}\vartheta=g \quad k,n,g\text{-}const;\ \vartheta=(\int ge^{\int\frac{k}{m}dx}dx+c)e^{-\int\frac{k}{m}dx}=(g\int e^{\frac{k}{m}x}dx+c)e^{-\frac{k}{m}x}=$

$=g(e^{\frac{k}{m}x}\frac{m}{k}+c)e^{-\frac{k}{m}x}\,;\ \vartheta=g\frac{m}{k}+ce^{-\frac{k}{m}x}$ - общее решение.

н.у. $\vartheta(0)=\vartheta_0\,;\ \vartheta_0=\frac{gm}{k}+c\to c=\vartheta_0-\frac{gm}{k}\to\ \vartheta=\frac{gm}{k}+(\vartheta_0-\frac{gm}{k})e^{-\frac{k}{m}x}$ - частное решение.

Дифференциальное уравнение Бернулли.

Уравнение Бернулли имеет вид: $y' = P(x)y = g(x)y^n$ (6)

Замечание: уравнение Бернулли является нелинейным, так как в нём присутствует функция n-ой степени.

Частные случаи решения (6).

1. $n = 0 \rightarrow y' + P(x)y = g(x) \equiv (1)$ - линейное уравнение первого порядка
2. $n = 1 \rightarrow y' + P(x)y = g(x)y \rightarrow y' = y(g(x) - P(x))$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

3. $n \neq 0;1 \rightarrow$ Разделим обе части уравнения (6) на y^n

$$\rightarrow y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = g(x)$$

Замена $z = y^{1-n}$ (7)

$$\rightarrow z' = (1-n)y^{-n}y' \rightarrow y'y^{-n} = \frac{z'}{1-n} \rightarrow \frac{z'}{1-n} + P(x)z = g(x) \rightarrow z' + (1-n)P(x)z = (1-n)g(x) -$$

линейное дифференциальное уравнение первого порядка, для которого известно решение (5).

$$Z = \left[(1-n)\int g(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx + c\right]e^{-(1-n)\int P(x)dx} \qquad (8)$$

После определения Z по формуле (8) осуществляется обратная замена по формуле (7).

Пример: $y' + \overbrace{x}^{P(x)} y = \overbrace{x}^{g(x)} y^3$

$$n = 3 \to Z = y^{-2}$$

$$Z = (-2\int xe^{-2\int xdx}dx + c)e^{2\int xdx} = (-2\int xe^{-x^2}dx + c)e^{x^2}$$

Замена: $t = -x^2 \to dt = -2xdx \to dx = \dfrac{dt}{-2x}$

$$Z = (-2\int xe^t \frac{dt}{-2x} + c)e^{x^2} = (\int e^t dt + c)e^{x^2} = (e^t + c)e^{x^2} = (e^{-x^2} + c)e^{x^2} \to Z = 1 + ce^{x^2} \to$$

$1 + ce^{x^2} = y^{-2} \to \qquad y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + ce^{x^2}}}$ - общее решение.