Функция нескольких переменных

Полный дифференциал: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

Частные производные сложной функции двух переменных

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Производные от неявной функции двух переменных

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$$

Экстремум

Условные обозначения:

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}; \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}; \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}.$$

Достаточные условия

Если функция $z = f(x,y)$ в некоторой области, содержащей т. $M_0(x_0,y_0)$, имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то в т. $M_0(x_0,y_0)$:

1. функция достигает своего максимума при выполнении условий: $A\times B - C^2 > 0$ и $A < 0$;
2. функция достигает своего минимума при выполнении условий: $A\times B - C^2 > 0$ и $A > 0$;
3. функция не имеет экстремума при выполнении условия: $A\times B - C^2 < 0$;
4. функция требует дополнительных исследований с привлечением частных производных более высокого порядка при выполнении условия: $A\times B - C^2 = 0$.

Условный экстремум функции двух переменных

три необходимых условия

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0; \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0; \qquad \varphi(x,y) = a$$

Достоточное условие

Если определитель $\Delta>0$, то в т. $M_0(x_0,y_0)$ функция имеет условный минимум;
Если определитель $\Delta<0$, то в т. $M_0(x_0,y_0)$ функция имеет условный максимум;
Если определитель $\Delta=0$, то в т. $M_0(x_0,y_0)$ требуется дополнительное исследование с привлечением производных более высокого порядка.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial x} & \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial y} & \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}; \quad F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$ – функция Лагранжа.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Однородное диф. ур. первого порядка: $u = u(x) = \dfrac{y}{x}$, $y' = u'x + u$.

Линейное диф. ур. первого порядка: $\boxed{y' + p(x)y = g(x)}$ Решение: $y = (\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c)e^{-\int p(x)dx}$.

Диф. ур. Бернулли: $\boxed{y' + p(x)y = g(x)y^n}$. Замена $z = y^{1-n}$.

Решение: $\boxed{z = \left[(1-n)\int g(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx + C\right]e^{-(1-n)\int p(x)dx}}$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$**, где** P, Q **удовлетворяют условиям:** $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$**. Решение:** $U(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$**, где** $\varphi(y)$ **определяется из равенства:** $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$ **Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах:** $\boxed{U(x,y) = C}$

Диф. ур. второго порядка, допускающие понижение порядка.

1 случай: $y'' = f(x, y')$. Замена: $z(x) = y'$. $z' = y''$.

2 случай: $y'' = f(y, y')$. Замена: $z(y) = y'$. $\to y'' = z'z$.

.

Линейное однородное диф. ур. второго порядка с постоянными коэффициентами.

$y'' + P_1y' + P_2y = 0$. характеристическое уравнение: $k^2 + P_1k + P_2 = 0$

1 случай: $D = P_1^2 - 4P_2$.; $D > 0 \to k_{1,2} = \dfrac{-p_1 \pm \sqrt{D}}{2}$ $\boxed{\to y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}}$.

2 случай: $D = P_1^2 - 4P_2$. $D = 0 \to k = -\dfrac{P_1}{2}$. $\boxed{\to y = e^{kx}(C_1 + C_2x)}$

3 случай: $D = P_1^2 - 4P_2$. $D < 0 \to k_{1,2} = \dfrac{-p_1 \pm \sqrt{|D|}i}{2} \to k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $\boxed{\to y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)}$

Линейное неоднородное диф. ур. 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$y'' + p_1y' + p_2y = g(x)$. Решение $y = C_1y_1 + C_2y_2 + y^* \to y = \overline{y} + y^*$

1 случай: $g(x) = A_n(x)e^{\gamma x}$, Частное решение: $y^* = x^rB_n(x)e^{\gamma x}$ $r = \begin{cases} 0, \text{если} & \gamma \neq k_1 \neq k_2 \\ 1, \text{если} & \gamma = k_1; \gamma = k_2 \\ 2, \text{если} & \gamma = k \end{cases}$

2 случай: $g(x) = e^{\gamma x}(A_n(x)\cos\delta x + B_m(x)\sin\delta x,) \to y^* = x^re^{\gamma x}(C_l(x)\cos\delta x + D_l(x)\sin\delta x)$

$r = \begin{cases} 0, \text{если} & \gamma + \delta i \neq \alpha + \beta i \\ 1, \text{если} & \gamma + \delta i = \alpha + \beta i. \end{cases}$ $l = \max\{n, m\}$

РЯДЫ

Признаки сходимости знакоположительных рядов

Типовые ряды: $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ -гармонический – расходится. $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p^n}$ $(p>1)$ РГП – сходится.

$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[p]{n}}$ $(p>1)$ - ряд Дирихле – расходится. $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>1)$ - ряд Дирихле – сходится.

1. Признак сравнения:

Если для двух знакоположительных рядов $\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n$ (1); $\sum_{n\to 1}^{\infty} b_n$ (2), начиная с некоторого номера $к$ выполняется следующее условие: $a_n \le b_n$ $(\forall n = k, \infty)$ (3), то:

1) Ряд (1) сходится при условии сходимости большего ряда (2).
2) Ряд (2) расходится при условии расходимости меньшего ряда (1).

2. Предельный признак сравнения.

Если для 2-х знакоположительных рядов (1) и (2) существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c \ne 0, \infty$, то эти ряды одновременно сходятся или одновременно расходятся.

3. Признак Даламбера.

Если для знакоположительного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $C = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, то:

$$\begin{cases} \text{сходится} & \text{– при } C<1 \\ \text{расходится} & \text{– при } C>1 \\ \text{признак неприменим} & \text{- при } C=1 \end{cases}$$

4.Признак Коши.

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $C = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, то:

$$\begin{cases} \text{сходится} & \text{– при } C<1 \\ \text{расходится} & \text{– при } C>1 \\ \text{признак неприменим} & \text{- при } C=1 \end{cases}$$

5. Интегральный признак Коши.

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сущ. несобственный интеграл $\int_{c}^{\infty} a_n dn$ (c-const), то:

$$\begin{cases} \text{ряд сходится, если несобственный интеграл сходится} \\ \text{ряд расходится, если несобственный интеграл расх. } (\infty) \\ \text{признак неприменим, если интеграл не вычисляется} \end{cases}$$

Признак Лейбница:

Если для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ $(a_n > 0)$ начинается со знака «+», выполняется следующее условие:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ (монотонное убывание). 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (необходимый признак сходимости ряда),

тогда ряд сходится. Если одно из этих условий не выполняется, то ряд расходится.

<u>Если для знакопеременного ряда сходится ряд составленный из модулей, то он является абсолютно сходящимся.</u>

<u>Если для знакопеременного ряда расходятся ряды, составленные отдельно из положительных и модулей отрицательных членов ряда, то ряд условно сходится.</u>

Область сходимости степенного ряда

По признаку Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|<1$; По признаку Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|}<1$.

$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (2)$ – **ряд Тейлора**.

РЯДЫ ФУРЬЕ

Ряд Фурье с периодом 2π: $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+в_n\sin nx\right]$,

где $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$, $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$, $в_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$.

Ряд Фурье для чётных и нечётных функций.

1 случай: $f(x)-$ чётная

$\to a_0=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)dx \to a_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_o^{\pi}f(x)\cos nxdx \to в_n=0 \qquad f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

2 случай: $f(x)-$ нечётная

$\to a_0=0 \quad \to a_n=0 \to в_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\sin nxdx \qquad f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}в_n\sin nx$

Ряд Фурье для функции с периодом $2L$

$a_0=\dfrac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L}f(x)dx$; $a_n=\dfrac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L}f(x)\cos\dfrac{\pi nx}{L}dx$; $b_n=\dfrac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L}f(x)\sin\dfrac{\pi nx}{L}dx$;

$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\dfrac{\pi nx}{L}+b_n\sin\dfrac{\pi nx}{L}\right]$.

Ряд Фурье для функции на отрезке $[a,b]$

$L=\dfrac{b-a}{2}$, ЗАМЕНА: $x=t+L+a$; Обратная замена: $t=x-L-a$.

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

$$\iint\limits_{D}(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rd\varphi dr$$

Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат.

$$\iiint\limits_{V}f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V^*}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)rd\varphi drdz$$

Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.

$$\iiint\limits_{V}f\left(x,y,z\right)dxdydz=\iiint\limits_{V^*}f\left(r\cos\phi\cos\theta,r\sin\phi\cos\theta,r\sin\theta\right)r^2\cos\theta\quad d\phi drd\theta$$

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1 рода

$$\int\limits_{L}f(x,y)dL=\int\limits_{a}^{b}f(x,y(x))\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx=$$

$$=\int\limits_{t_H}^{t_B}f(x(t),y(t))\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt=\int\limits_{\varphi_H}^{\varphi_B}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2+\left(r'(\varphi)\right)^2}d\varphi;$$

2 рода

$$\int\limits_{L}\left[X(x,y)dx+Y(x,y)dy\right]=\int\limits_{a}^{b}\left[X(x,y(x))+Y(x,y(x))\cdot y'(x)\right]dx=$$

$$=\int\limits_{t_H}^{t_B}\left[X(x(t),y(t))\cdot x'(t)+Y(x(t),y(t))\cdot y'(t)\right]dt;$$

Формула Грина $\oint\limits_{L}\left[X(x,y)dx+Y(x,y)dy\right]=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy;$

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1 РОДА

$$\iint\limits_{\sigma}F(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_{D}F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy;$$ z = f(x, y) - уравнение поверхности σ

2 РОДА

$$\iint\limits_{\sigma}\left[X\left(x,y,z\right)dydz+Y\left(x,y,z\right)dxdz+Z\left(x,y,z\right)dxdy\right]=$$

$$=\pm\iint\limits_{D_{yoz}}X\left(x(y,z),y,z\right)dydz\pm\iint\limits_{D_{xoz}}Y\left(x,y(x,z),z\right)dxdz\pm\iint\limits_{D_{xoy}}Z\left(x,y,z(x,y)\right)dxdy;$$

Для замкнутой поверхности - формула Остроградского

$$\iint\limits_{\sigma}\left[X\left(x,y,z\right)dydz+Y\left(x,y,z\right)dxdz+Z\left(x,y,z\right)dxdy\right]=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$div\overline{F}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Формула Стокса:

$$\oint\limits_{L}\left(\overline{F},dr\right)=\iint\limits_{\sigma}\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(\overline{n}\,\hat{}\,x)+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(\overline{n}\,\hat{}\,y)+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(\overline{n}\,\hat{}\,z)\right]d\sigma$$

Направляющие косинусы для плоскости: $Ax+Bz+Cz+D=0$

$$\cos(\overline{n}\,\hat{}\,x)=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad\cos(\overline{n}\,\hat{}\,y)=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\quad\cos(\overline{n}\,\hat{}\,z)=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Вектором градиент: $\overline{gradU}=\frac{\partial U}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial U}{dz}\overline{k}$

ФКП

$z=x+iy$ -исходная комплексная переменная. $\bar{z}=x-iy$ - сопряженная комплексная переменная.

Гиперболические функции: $\boxed{\mathrm{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}}$, $\boxed{\mathrm{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}}$.

<u>Условия Коши-Римана в полярной системе координат</u>

$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}}$; $\boxed{\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}}$ Показательная форма комплексной переменной: $\boxed{z=re^{i\varphi}}$

модуль: $\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}}$ аргумент: $\boxed{\varphi=\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}}$

Условия Коши – Римана: $\rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}$ и $\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial y}$

Дифференцирование: $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

Интегрирование по комплексному аргументу: $\int_L f(z)dz=\int_L [Udx-Vdy]+i\int_L [Vdx+Udy]$

Интегральная формула Коши: $\int_L \frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i f(a)$, **для** n **-ной произв.:** $\int_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i f^{(n)}(a)}{n!}$

Ряд Лорана: $\frac{1}{z-a}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$

Разложение элементарных Функций в **Ряд Лорана:**

$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n}}{(2n)!}$

Вычеты: $\int_L f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{m}a_{-1}^{(k)}$, где $a_{-1}=\lim_{z\to b}f(z)(z-b)$

Или $\oint_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$

Вычет функции $f(z)$ в полюсе $z=a$ порядка k вычисляется по формуле…

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-a)^k f(z)\right]$$

Операционное исчисление

Изображение $F(z)$	Оригинал $f(t)$
$\frac{1}{z}$	1
$\frac{1}{1+z^2}$	$\sin(t)$
$\frac{z}{1+z^2}$	$\cos(t)$
$\frac{a}{a^2+z^2}$	$\sin(at)$
$\frac{z}{a^2+z^2}$	$\cos(at)$
$\frac{1}{z+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{a}{a^2+(z+\alpha)^2}$	$e^{-\alpha t}\sin(at)$
$\frac{z+\alpha}{a^2+(z+\alpha)^2}$	$e^{-\alpha t}\cos(at)$
$\frac{n!}{z^{n+1}}$	t^n
$\frac{n!}{(z+\alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{-\alpha t}$
$\frac{2za}{(a^2+z^2)^2}$	$t\sin(at)$
$\frac{z^2-a^2}{(a^2+z^2)^2}$	$t\cos(at)$
$\frac{a}{z^2-a^2}$	$\mathrm{sh}(at)$
$\frac{z}{z^2-a^2}$	$\mathrm{ch}(at)$

Теорема запаздывания: Если $F(z)\to f(t)$, то $e^{-zt_0}F(z)\to f(t-t_0)$; $f_1(t)\to F_1(z)$ $\quad (t_0 - \text{const})$.

Теорема о дифференцировании изображений: Если $F(z)\to f(t)$, то

$(-1)^n F^{(n)}(z)\to t^n f(t)$; $\quad F_1(z)\to f_1(t)$

Частные случай многочлена для дифференциального уравнения 2-го и 3-го порядка.

$$Y(z)=\frac{F(z)}{\varphi_n(z)}+\frac{\psi_{n-1}(z)}{\varphi_n(z)}$$

$n=2\to\varphi_2(z)=a_2z^2+a_1z+a_0;\qquad \psi_1(z)=a_2(zy_0+y_{10})+a_1y_0$

$n=3\to\varphi_3(z)=a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0;\qquad \psi_2(z)=a_3(z^2y_0+zy_{10}+y_{20})+a_2(zy_0+y_{10})+a_1y_0$

Пример: $\int\limits_L [(x+y)-ixy]dz = \int\limits_L [(x+y)dx + xydy] + i\int\limits_L [-xydx + (x+y)dx]$

$$L: \left.\begin{array}{l} x=\cos t \\ y=\sin t \end{array}\right\} \text{окружность } R=1 \qquad \left.\begin{array}{l} U = x+y \\ V = -xy \end{array}\right|$$

$$\int\limits_L [Xdx + Ydy] = \int\limits_{tн}^{tв} [X(x(t);y(t))\cdot x'(t) + Y(x(t);y(t)\cdot y'(t)]dt$$

$$\int\limits_L f(z)dz = 4\int\limits_0^{\pi/2}\left[(\cos t+\sin t)(\underbrace{-\sin t}_{x'(t)}) + \cos t\sin t\underbrace{\cos t}_{y'(t)}dt + i4\int\limits_0^{\pi/2}[-\cos t\sin t(-\sin t) + (\cos t+\sin t)\cos t]\right]dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}\sin 2t - \sin^2 t + \sin t\cos^2 t\right]dt + 4i\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos t\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]dt =$$

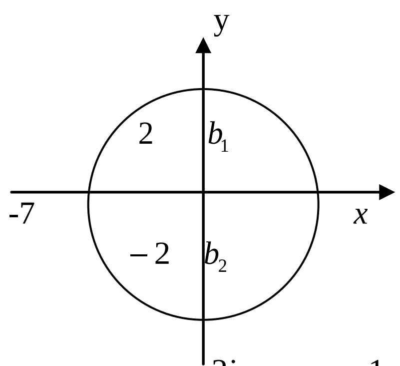
$$= 4(\frac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos 2t}{2}dt + \int\limits_0^{\pi/2}\sin t\cos^2 tdt) + 4i(\int\limits_0^{\pi/2}\cos t\sin^2 tdt + \int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt - \frac{1}{4}\cos^2 t\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= 4(\frac{1}{4}(-1-1) - \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^1 U^2 dU) + 4i(\int\limits_0^1 V^2 dV + \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}(-1-1)) =$$

$$= 4(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{U^3}{3}\Big|_0^1) + 4i(\frac{V^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}) = -2 - \pi - \frac{4}{3} - i(\frac{4}{3} + \pi + 2) = -\frac{2}{3} - \pi + i(\frac{10}{3} + \pi).$$

Например: $\int\limits_L \frac{zdz}{(z^2+4)(z+7)} = I \qquad L: |z| = 3; \qquad z = -7i;\ z = \pm 2i -$ о.т.

$z^2 + 4 = (z+2i)(z-2i)$



$$a_{-1}^{(1)} = \lim_{z\to 2i}\frac{z}{(z+2i)(z-2i)(z+7)}(z-2i) = \frac{2i}{4i(2i+7)} = \frac{1}{2(2i+7)}$$

$$a_{-1}^{(2)} = \lim_{z\to 2i}\frac{z}{(z+2i)(z-2i)(z+7)}(z+2i) = \frac{-2i}{-4i(7-2i)} = \frac{1}{2(7-2i)}$$

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{2(7+2i)} + \frac{1}{2(7-2i)}\right) = \pi i\frac{7-2i+7+2i}{49-(-4)} = \frac{14}{53}\pi i.$$