Неопределенный интеграл

3 часть

Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Интегрирование иррациональных выражений

Интегрирование иррационального выражения

$$\frac{h}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Алгоритм решения

1. Выделяется полный квадрат из подкоренного выражения: $ax^2+bx+c=a\left[(x+p)^2\pm q^2\right]$
2. $I=\int\frac{h}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{h}{\sqrt{a}}\int\frac{1}{\sqrt{(x+p)^2\pm q^2}}dx$.
3. Замена: $t=x+p;\ dx=dt$ $\qquad I=\frac{h}{\sqrt{a}}\int\frac{1}{\sqrt{t^2\pm q^2}}dt$

1 случай: $a>0$, знак $\pm$

$$I=\frac{h}{\sqrt{a}}\int\frac{1}{\sqrt{t^2\pm q^2}}dt=\frac{h}{\sqrt{a}}\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm q^2}\right|=\frac{h}{\sqrt{a}}\ln\left|x+p+\sqrt{(x+p)^2\pm q^2}\right|$$

2 случай: $a<0$, знак $-$ в знаменателе.

$$I=\frac{h}{\sqrt{|a|}}\int\frac{1}{\sqrt{q^2-t^2}}dt=\frac{h}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{t}{q}=\frac{h}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{x+p}{2}$$

3 случай: $a<0$, знак $+$ в знаменателе. Первообразной не существует, т.к. подкоренное выражение отрицательное.

4. Прибавляем к одной из первообразных произвольную постоянную.

Интегрирование иррационального выражения

$$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad где \quad a,b,c,m,n - const$$

1. Выделяем полный квадрат.

$$ax^2+bx+c=a\left[(x+p)^2 \pm q^2\right]$$

2. $$I=\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{mx+n}{\sqrt{(x+p)^2 \pm q^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{m(t-p)tn}{\sqrt{t^2 \pm q^2}}$$

Замена: $t=x+p,\ x=t-p;\ dx=dt$

3. Разбиваем на сумму двух интегралов.

$$I=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{mt}{\sqrt{t^2 \pm q^2}}dt}_{I_1}+\underbrace{\int \frac{n-mp}{\sqrt{t^2 \pm q^2}}dt}_{I_2}$$

4. Вычислим I_1.

$$I_1=\frac{m}{\sqrt{a}}\int \frac{t}{\sqrt{t^2 \pm q^2}}dt=\frac{m}{a}\int \frac{t}{\sqrt{a}}\frac{du}{2t}=\frac{m}{2\sqrt{a}}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{m}{2\sqrt{a}}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{m}{\sqrt{a}}\sqrt{t^2 \pm q^2}=\frac{m}{\sqrt{a}}\sqrt{(x+p)^2 \pm q}$$

Замена: $u=t^2 \pm q^2;\ du=2tdt;\ dt=\frac{du}{2t}$

5. Вычислим I_2.

$$I_2 = \frac{n-mp}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm q^2}}$$

1 случай: $a > 0$, знак $\pm$ в знаменателе.

$$I_2 = \frac{n-mp}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} = \frac{n-mp}{\sqrt{a}} \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm q^2}\right| = \frac{n-mp}{\sqrt{a}} \ln\left|x + p + \sqrt{(x+p)^2 \pm q^2}\right|$$

2 случай: $a < 0$, знак – в знаменателе.

$$I_2 = \frac{n-mp}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dt}{\sqrt{q^2 - t^2}} = \frac{n-mp}{\sqrt{|a|}} \arcsin\frac{t}{q} = \frac{n-mp}{\sqrt{|a|}} \arcsin\frac{x+p}{q}$$

3 случай: $a < 0$, знак + в знаменателе. Первообразной не существует, т.к. подкоренное выражение отрицательное.

6. $I = I_1 + I_2 + C$

Интегрирование иррационального выражения

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

Алгоритм решения

1. $ax^2+bx+c=a\left[(x+p)^2\pm q^2\right];\quad I=\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\sqrt{a}\int\sqrt{(x+p)^2\pm q^2}\,dx$

2. замена: $t=x+p;\ dt=dx\to I=\sqrt{a}\int\sqrt{t^2\pm q^2}\,dt$

3. $a>0$, знак $\pm$ $\qquad I=\sqrt{a}\underbrace{\int\sqrt{t^2\pm q^2}\,dt}_{I_0};\quad I_0=\int\sqrt{t^2\pm q^2}\,dt$

Интегрируем по частям:

$$I_0=uv-\int v\,du;\qquad u=\sqrt{t^2\pm q^2}\to du=\frac{2t}{2\sqrt{t^2\pm q^2}}dt;\quad dv=dt\to v=t$$

$$I_0=t\sqrt{t^2\pm q^2}-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{t^2\pm q^2}}\to\qquad I_0=t\sqrt{t^2\pm q^2}-\int\frac{\left(t^2\pm q^2\right)\pm q^2}{\sqrt{t^2\pm q^2}}dt$$

Разобьём на 2 интеграла.

$$I_0 = t\sqrt{t^2 \pm q^2} - \underbrace{\int \sqrt{t^2 \pm q^2}\,dt}_{-I_0} \pm q^2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} \to I_0 = t\sqrt{t^2 \pm q^2} - I_0 \pm q^2 \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm q^2}\right|$$

$$I_0 = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2 \pm q^2} \pm q^2 \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm q^2}\right|\right) \to I = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(t\sqrt{t^2 \pm q^2} \pm q^2 \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm q^2}\right|\right)$$

$$I = \frac{\sqrt{a}}{2}\left((x+p)\sqrt{(x+p)^2 + q^2} \pm q^2 \ln\left|x + p + \sqrt{(x+p)^2 \pm q^2}\right|\right) + C$$

4. $a < 0$, знак – $\qquad I = \sqrt{|a|}\int \sqrt{q^2 - t^2}\,dt$

Применяем тригонометрическую подстановку: $t = q\sin u \to u = \arcsin\frac{t}{q}$; $dt = q\cos u du$.

$$I = \sqrt{|a|}\int \sqrt{a^2 - q^2\sin^2 u}\, q\cos u du = q^2\sqrt{|a|}\int \sqrt{1 - \sin^2 u}\cos u du = q^2\sqrt{|a|}\int \cos^2 u du =$$

$$= q^2\sqrt{|a|}\int \frac{1 + \cos 2u}{2}du = \frac{q^2\sqrt{|a|}}{2}\left(u + \frac{\sin 2u}{2}\right) = \frac{q^2\sqrt{|a|}}{2}\left(\arcsin\frac{t}{q} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{t}{q}\right)\right)$$

$$I = \frac{q^2\sqrt{|a|}}{2}\left(\arcsin\frac{x+p}{q} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x+p}{q}\right)\right) + C$$