Неопределенный интеграл

2 часть

Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Интегрирование по частям неопределённого интеграла.

Интегрирование рациональных выражений.

Интегрирование по частям неопределённого интеграла.

Интегрирование по частям применяется, если подынтегральная функция представлена в виде произведения двух элементарных функций, входящих в состав табличных.

Вычислим дифференциал произведения двух непрерывных и дифференцируемых функций: $d(uv) = vdu + udv$. Проинтегрируем левую и правую части: $\int d(uv) = uv = \int vdu + \int udv \to \int udv = uv - \int vdu$ - формула интегрирования по частям.

Случаи интегрирования по частям.

1. Если подынтегральная функция представлена в виде произведения многочлена n-ой степени $P_n(x)$ и элементарной функции $f(x)$, входящей в состав табличных, то: $u = P_n(x) \to du = P_n'(x)dx,\qquad dv = f(x)dx \to v = \int f(x)dx$

Замечание: В этом случае формула интегрирования по частям применяется столько раз, какова степень многочлена.

2. Если подынтегральная функция содержит одну из следующих элементарных функций $\ln x, \arcsin x, \arccos x, arctgx$, то в формуле интегрирования по частям в качестве u выбирается одна из указанных функций, в качестве dv все остальные, входящие в подынтегральное выражение.

Замечание: Если подынтегральная функция представлена только одной из указанных функций, то $dv = dx \to v = x$.

3. Если подынтегральная функция представлена в одном из следующих видов: $a^{bx}\sin cx, a^{bx}\cos cx, \sin bx\cos cx$, то формула интегрирования по частям применяется 2 раза. В результате чего в левой и правой частях получится искомый интеграл, который находится из решений полученного уравнения, как уравнение с одним неизвестным.

Пример: $I=\int e^x \sin 2x dx$

$$u=e^x \to du=e^x dx; \quad dv=\sin 2x dx \to V=\int \sin 2x=-\frac{\cos 2x}{2}$$

$$I=e^x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)+\frac{1}{2}\int \cos 2x e^x dx, \quad u=e^x \to du=e^x dx; \quad dv=\cos 2x dx \to v=\frac{\sin 2x}{2}$$

$$I=-\frac{1}{2}e^x\cos 2x+\frac{1}{2}\left(e^x\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int \sin 2x e^x dx\right) \to I=\frac{1}{2}e^x\cos 2x+\frac{1}{4}e^x\sin 2x-\frac{1}{4}I$$

$$I+\frac{1}{4}I=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^x\left(\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right); \to I=\frac{2}{5}e^x\left(\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$

Интегрирование рациональных выражений.

$$\frac{h}{ax+b} \text{ и } \frac{h}{(ax+b)^k}, \text{где} \qquad a, b, h - const$$

$$\int \frac{h}{ax+b}dx = h\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{h\ln|ax+b|}{a} + C; \qquad \int \frac{h}{(ax+b)^k} = h\int (ax+b)^{-k}dx = \frac{h(ax+b)^{k+1}}{a(1-k)} + C$$

Замечание: Если интегралы представлены в виде: $\int \frac{P_n(x)}{ax+b}dx$, $(n > 1)$ или $\int \frac{G_m(x)}{(ax+b)^k}dx$, $(m > k)$, то по правилу деления столбиком многочлен числителя делится на многочлен знаменателя, выделяется целая часть в виде многочлена соответственно $n-1$ или $m-k$ степени и одна из рассмотренных правильных дробей.

Пример: $I = \int \frac{5x^2+6x+3}{2x+1}dx$

$$\begin{array}{l|l} 5x^2 + 6x + 3 & 2x+1 \\ \cline{2-2} -\left(5x^2+\frac{5}{2}x\right) & \frac{5}{2}x + \frac{7}{4} \\ \cline{1-1} \qquad \frac{7}{2}x+3 & \\ \qquad -\left(\frac{7}{2}x+\frac{7}{3}\right) & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 2/3 & \end{array}$$

$$\to I = \int\left(\frac{5}{2}x + \frac{7}{4} + \frac{2}{3}\frac{1}{2x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{5}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{7}{4}x + \frac{2}{3}\frac{Ln|2x+1|}{2} =$$

$$= \frac{5x^2}{4} + \frac{7}{4}x + \frac{2Ln|2x+1|}{6} + C$$

Интегрирование рационального выражения.

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}, \quad где \quad a,b,c,m,n-const$$

Алгоритм решения

1. Выделяем полный квадрат из знаменателя.

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

Введём обозначение: $p=\frac{b}{2a}; \pm q^2=\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$

$$ax^2+bx+c=a\left[(x+p)^2\pm q^2\right]$$

2. $\underbrace{\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx}_{-I}=\int\frac{mx+n}{a\left[(x+p)^2\pm q^2\right]}dx=\frac{1}{a}\int\frac{m(t-p)+n}{t^2\pm q^2}$

Замена: $t=x+p\rightarrow x=t-p\rightarrow dx=dt$.

3. Разобьём интеграл на сумму двух интегралов.

$$I=\underbrace{\frac{1}{a}\int\frac{mt}{t^2\pm q^2}dt}_{I_1}+\underbrace{\frac{1}{a}\int-\frac{mp+n}{t^2\pm q^2}dt}_{I_2}$$

4. Вычислим интеграл I_1.

$$I_1=\frac{m}{a}\int\frac{t}{t^2\pm q^2}dt=\frac{m}{a}\int\frac{t}{u}\frac{du}{2t}=\frac{m}{2a}\int\frac{du}{u}=\frac{m}{2a}\ln|u|$$

Замена: $u=t^2\pm q^2$, $du=2tdt\to dt=\dfrac{du}{2t}$

$$I_1=\frac{m}{2a}\ln\left|t^2\pm q^2\right|=\frac{m}{2a}\ln\left|(x+p)^2\pm q^2\right|$$

5. Вычислим интеграл I_2.

$$I_2=\frac{n-mp}{a}\int\frac{1}{t^2\pm q^2}dt$$

1 случай: $a>0$, знак $+$ в знаменателе:

$$I_2=\frac{n-mp}{a}\int\frac{1}{q^2+t^2}dt=\frac{n-mp}{a}\frac{1}{q}arctg\frac{t}{q}=\frac{n-mp}{aq}arctg\frac{x+p}{q}$$

2 случай: $a>0$, знак $-$ в знаменателе.

$$I_2=\frac{n-mp}{a}\int\frac{1}{t^2-q^2}dt=\frac{n-mp}{a}\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{t-q}{t+q}\right|=\frac{n-mp}{2aq}\ln\left|\frac{x+p-q}{x+p+q}\right|$$

3 случай: $a<0$, знак – в знаменателе.

$$I_2=\frac{n-mp}{|a|}\int\frac{1}{q^2-t^2}dt=\frac{n-mp}{|a|}\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{t+q}{t-q}\right|=\frac{n-mp}{|a|}\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{x+p+q}{x+p-q}\right|$$

4 случай: $a<0$, знак + в знаменателе.

В этом случае первообразная такая же, как и в первом случае, только перед интегралом появится знак минус.

$$I_2=-\frac{n-mp}{|a|q}arctg\frac{x+p}{q}$$

6. $I=I_1+I_2+C$