Неопределенный интеграл

1 часть

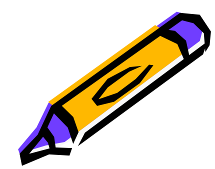
Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Понятие первообразной и неопределённого интеграла.

Свойства неопределённого интеграла.

Таблица неопределённых интегралов.

Замена переменных в неопределённом интеграле.



Понятие первообразной и неопределённого интеграла.

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной по отношению к функции $f(x)$, если эти функции связаны следующим соотношением: $F'(x)=f(x)$.

Теорема 1: Если $F(x)$ первообразная от $f(x)$, то $F(x)+c$ также является первообразной от этой функции $c-const$.

Доказательство

$$\left(F(x)+C\right)'=\underbrace{F'(x)}_{=f(x)}+C'=f(x)+0=f(x)\rightarrow F(x)+C$$ -первообразная.

Теорема 2: Если одна и та же функция имеет две первообразные, то они отличаются друг от друга на величину произвольной постоянной.

Доказательство

$$\varphi(x)=F_2(x)-F_1(x)\rightarrow\varphi'(x)=F_2'(x)-F_1'(x)=f(x)-f(x)=0$$

$\varphi'(x)=C$ - произвольная константа.

Определение: Неопределённым интегралом называется бесчисленное множество первообразных, отличающихся друг от друга на величину произвольной постоянной.

Обозначение: $\int f(x)dx=F(x)+C$

$f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

Свойства неопределённого интеграла

1. Производная от интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+c\right)' = F'(x) = f(x)$$

2. Дифференциал от интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)'dx = f(x)\,dx$$

3. Интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+C$$

Следствие: $\int dx = x + C$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx, \quad C - const.$$

Доказательство:

Вычислим производную от левой и правой части:

$$\left(\int Cf(x)\,dx\right)' = Cf(x) \qquad \left(C\int f(x)\,dx\right)' = C\left(\int f(x)\,dx\right)' = Cf(x).$$

Получили одно и то же выражение, значит формула четвёртого свойства верна.

5. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов вычисленных от каждой из этих функций.

$$\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx$$

Доказательство:

$$\left(\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx\right)'=f_1(x)+f_2(x)$$

$$\left(\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx\right)'=\left(\int f_1(x)\,dx\right)'+\left(\int f_2(x)\,dx\right)'=f_1(x)+f_2(x)$$

Получили одно и то же выражение, значит формула пятого свойства верна.

6. Если аргумент подынтегральной функции в свою очередь является линейной функцией, то интеграл вычисляется по формуле: $\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c$

Доказательство: $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+c\right)'=\frac{1}{a}F'(ax+b)a=f(ax+b)$

Таблица неопределённых интегралов

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$	**Доказательство**	
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\left(\arcsin \frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	$\left(\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C\right)' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} =$ $= \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	

$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	$\left(\frac{1}{a} arctg \frac{1}{a} + C\right)' = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2\frac{a^2+x^2}{a^2}}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$	$\left(\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C\right)' = \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}\frac{x+a-x+a}{(x+a)^2} = \frac{1}{2a}\frac{2a}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{x^2-a^2}$
$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\| + C$	**Аналогично**
$\int tg\, x dx = -\ln\|\cos x\| + C$	$(-\ln\|\cos x\| + C)' = -\frac{(-\sin x)}{\cos x} = tg\, x$
$\int ctg\, x dx = \ln\|\sin x\| + C$	$(\ln\|\sin x\| + C)' = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\, x$

Пример: $\int ctg(5x-1)dx = \frac{\ln|\sin(5x-1)|}{5} + C$

Замена переменных в неопределённом интеграле.

Целью замены переменных является преобразование подынтегральной функции так, чтобы получить один из табличных интегралов.

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt$$

Замена: $x = x(t)$; $dx = x'(t)dx$

Для доказательства формулы вычислим производную от левой и правой части по одной и той же переменной x.

$$\left(\int f(x)dx\right)_x' = f(x)$$

$$\left(\int f(x(t))x'(t)dt\right)_x' = \frac{\left(\int f(x(t))x'(t)dt\right)_t'}{x'(t)} = \frac{f(x(t))x'(t)}{x'(t)} = f(x(t)) = f(x)$$

Используем функцию произвольной параметрической функции:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = f(x(t)) = f(x)$$

Правила замены переменных.

Правило 1: Если подынтегральная функция представлена в виде произведения сложной и элементарной функцией, то в качестве новой переменной t выбирается аргумент сложной функции так, чтобы производная от него была пропорциональна элементарной функции.

Пример: $\int e^{\cos x}\sin x dx = \int e^{t}\sin x\dfrac{dt}{-\sin x} = -\int e^{t}dt = -e^{t} = -e^{\cos x} + c$

Замена: $t = \cos x;\ \ dt = -\sin dx \rightarrow dx = \dfrac{dt}{-\sin x}$

Замечание: После получения первообразной, при замене переменных, осуществляется обратная замена переменных.

Правило 2: Если подынтегральная функция содержит одно из следующих выражений, то применяется одна из следующих формул замены:

1) $\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = a\sin t \qquad dx = a\cos t dt \qquad t = \arcsin\dfrac{x}{a}$

2) $\sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x = \dfrac{a}{\sin t} \rightarrow dx = -\dfrac{a\cos t}{\sin t}dt$ Обратная замена: $t = \arcsin\dfrac{a}{x}$

3) $\sqrt{x^2 + a^2} \rightarrow x = atgt \qquad dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt \qquad t = \mathrm{arc}\,tg\dfrac{x}{a}$

Замечание: Указанные формулы замены носят название – тригонометрическая подстановка.