ЛЕКЦИЯ
Векторная функция

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Понятие векторной функции.
Производная векторной функции

Понятие векторной функции.

Рассмотрим вектор $\bar{r}$, начало которого совпадает с началом координат, концом является точка M(x,y,z). Тогда этот вектор в координат будет иметь вид: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$;

Пусть координаты данного вектора являются функциями одного того же параметра t, тогда вектор $\bar{r}$ будет при изменении параметра t менять свое направление и значение, т. е. являться функцией параметра t: $\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$. (1)

Определение: Векторной функцией называется вектор (1), координаты которого являются функциями параметра t.

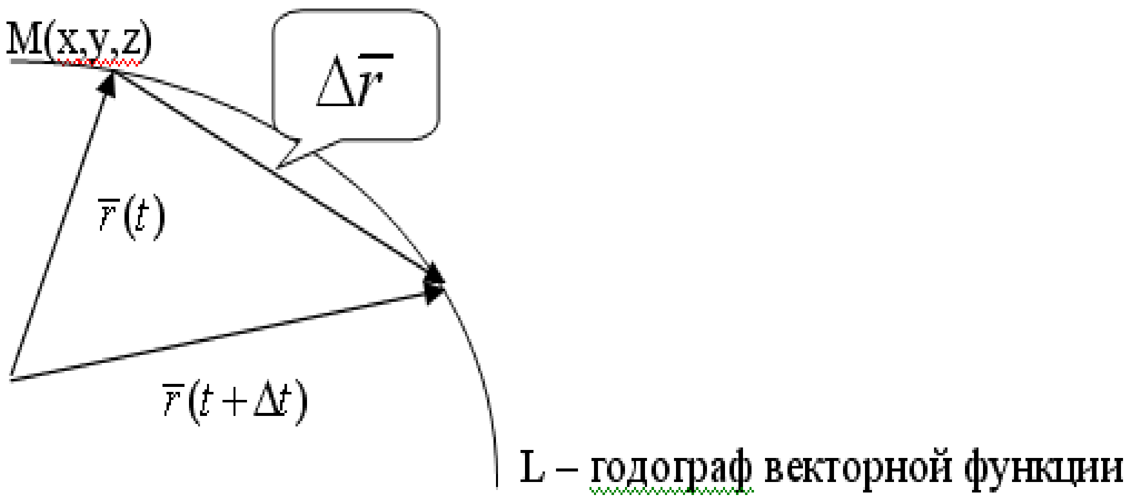
Определение: Линия, которую описывается в пространстве конец вектора (1) называется годографом векторной функции.

© 2010, Фёдоров Павел Борисович

Производная векторной функции

По определению производной: $\bar{r}' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}$ (2).

Значения векторной функции при $t+\Delta t$ и t, а также приращения векторной функции показаны на рисунке:



(С) 2010, Фёдоров Павел Борисович

Вычисляем по формуле (1) значения векторной функции при $t+\Delta t$ и t и подставляем их в формулу (2):

$$\bar{r}' = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)\bar{i}+y(t+\Delta t)\bar{j}+z(t+\Delta t)\bar{k}-x(t)\bar{i}-y(t)\bar{j}-z(t)\bar{k}}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[x(t+\Delta t)-x(t)]\bar{i}+[y(t+\Delta t)-y(t)]\bar{j}+[z(t+\Delta t)-z(t)]\bar{k}}{\Delta t}$$

В каждой квадратной скобке содержится приращение соответствующей функции

$$\bar{r}' = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x\bar{i}+\Delta y\bar{j}+\Delta z\bar{k}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\bar{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\bar{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\bar{k}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\bar{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\bar{j}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\bar{k}$$

Каждый их пределов является по определению производной соответствующей функции:

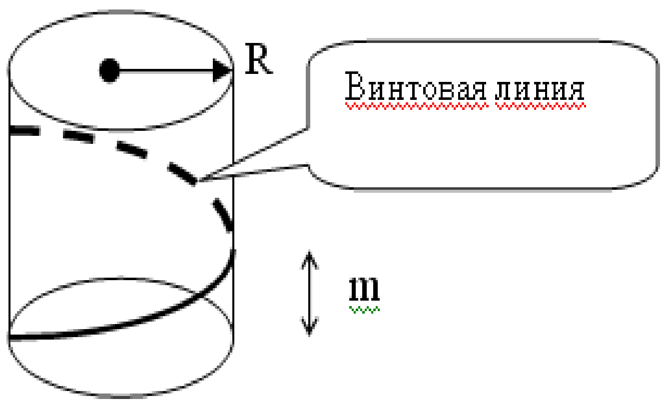
$$\to \bar{r}' = x'(t)\bar{i}+y'(t)\bar{j}+z'(t)\bar{k} \quad (3)$$

При $\Delta t\to 0$ Δr стремиться к касательной в точке M(x,y,z).

Вывод: Производная векторной функции является вектором (3), направленным по касательной в данной точке, и имеющим следующую длину: $|\bar{r}'| = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}$

© 2010, Фёдоров Павел Борисович

Например: $\overline{r} = R\cos t\overline{i} + R\sin t\overline{j} + Rmt\overline{k}$; - винтовая линия (Геликоид), где R – радиус круга, m – шаг винтовой линии.



Вычислим производную от этой функции: $\overline{r}' = -R\sin t\cdot\overline{i} + R\cos t\cdot\overline{j} + m\cdot\overline{k}$ и модуль производной: $|\overline{r}'| = \sqrt{R^2 + m^2} = const$.

Вывод: Скорость скольжения материальной точки без трения по винтовой линии есть величина постоянная.

© 2010, Фёдоров Павел Борисович