Определенный интеграл

2 часть

Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Определённый интеграл с переменным верхним пределом.

Методы вычисления определённого интеграла.

Определённый интеграл на отрезке симметричном относительно нуля.

Определённый интеграл с переменным верхним пределом.

$$\int_a^t f(x)\,dx = I(t),\ a - const,\ t \text{-переменная},\ t \in [a,b].$$

Замечание: определённый интеграл с переменным верхним пределом является функцией этого верхнего предела.

Теорема: Определённый интеграл с переменным верхним пределом от функции $f(x)$ является первообразной от этой функции, т.е. $I(t) = F(t)$.

Доказательство.

требуется доказать, что $F'(t) = I'(t) = f(t)$

$$I'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta t};\ \Delta I = I(t - \Delta t) - I(t) = \int_a^{t+\Delta t} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx = \int_a^t f(x)\,dx + \int_a^{t+\Delta t} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx \to$$

$$I'(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(x)\,dx = f(t_0)(t + \Delta t - t) = f(t_0)\Delta t.\ t_0 \in [t, t + \Delta t];\ \Delta t \to 0;\ t_0 \to t \Rightarrow I'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} f(t_0) = f(t)$$

Значит $I(t)$ является первообразной от $f(t)$, значит мы имеем бесчисленное множество первообразных отличающихся друг от друга на величину c, значит

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dt + c.$$

Методы вычисления определённого интеграла.

Замена переменных

$$x = x(t) \rightarrow dx = x'(t)dt \rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{t_н}^{t_в} f(x(t))x'(t)dt;$$

Замечание: При замене переменных в определённом интеграле обязательно меняются пределы интегрирования. Для нахождения новых пределов интегрирования $t_в, t_н$ необходимо подставить вместо x формулу замены $x = x(t)$ старые пределы интегрирования a, b., т.е. $a = x(t_н); b = x(t_в)$

Вычислим значение интегралов левой и правой части по формуле Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_{t_н}^{t_в} f(x(t))x'(t)dt = F(x(t))\Big|_{t_н}^{t_в} = F(x(t_в)) - F(x(t_н)) = F(b) - F(a)$$

Получилось одно и тоже выражение, значит формула замены верна.

Замечание: При замене переменных в определённом интеграле обратная замена не осуществляется т.к. результатом этого интеграла является число.

Интегрирование по частям.

Вычислим дифференциал произведения двух непрерывных и дифференцируемых функций: $d(uv) = vdu + udv$

Проинтегрируем левую и правую части: $\int_a^b d(uv) = uv = \int_a^b udv + \int_a^b vdu \rightarrow$

$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ - формула интегрирования по частям.

Определённый интеграл на отрезке симметричном относительно нуля.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \overset{8-е\ свойство}{=} \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{a} f(x)\,dx}_{I_2} \to I = I_1 + I_2$$

Для того чтобы исследовать поведение интеграла на чётность и нечётность осуществим замену переменной.

$$x = -t;\ dx = -dt; \quad -a = -t_н \to t_н = a; \quad 0 = t_в \to t_в = 0, \qquad \to I_1 = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt$$

1 случай: $f(x)$ - нечётная.

$I_1 = \int_{a}^{0} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \to I_1 = -I_2 \to I = 0 \to$ интеграл на отрезке симметричном относительно нуля от нечётной функции равен нулю.

2 случай: $f(x)$ - чётная.

$I_1 = \int_{a}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(x)\,dx \to I_1 = I_2 \to I = 2I_2 \to$ интеграл на отрезке симметричном относительно нуля от чётной функции равен двум интегралам на половинном отрезке.