

# Определенный интеграл

2 часть

Фёдоров Павел Борисович  
Сайт лекций по математике:  
[Fedorovkniga.jimdo.com](http://Fedorovkniga.jimdo.com)

Определённый интеграл с  
переменным верхним пределом.

Методы вычисления определённого  
интеграла.

Определённый интеграл на отрезке  
симметричном относительно нуля.



## Определённый интеграл с переменным верхним пределом.

$$\int_a^t f(x) dx = I(t), \quad a - \text{const}, \quad t - \text{переменная}, \quad t \in [a, b].$$

Замечание: определённый интеграл с переменным верхним пределом является функцией этого верхнего предела.

Теорема: Определённый интеграл с переменным верхним пределом от функции  $f(x)$  является первообразной от этой функции, т.е.  $I(t) = F(t)$ .

Доказательство.

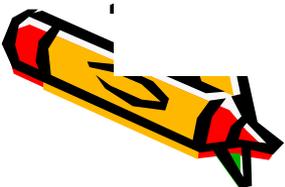
требуется доказать, что  $F'(t) = I'(t) = f(t)$

$$I'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta t}; \quad \Delta I = I(t + \Delta t) - I(t) = \int_a^{t+\Delta t} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx = \int_a^t f(x) dx + \int_t^{t+\Delta t} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx \rightarrow$$

$$I'(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(x) dx = f(t_0)(t + \Delta t - t) = f(t_0)\Delta t. \quad t_0 \in [t, t + \Delta t]; \quad \Delta t \rightarrow 0; \quad t_0 \rightarrow t \Rightarrow I'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t_0) = f(t)$$

Значит  $I(t)$  является первообразной от  $f(t)$ , значит мы имеем бесчисленное множество первообразных отличающихся друг от друга на величину  $c$ , значит

$$F(t) = \int_a^t f(x) dt + c.$$



## Методы вычисления определённого интеграла.

### Замена переменных

$$x = x(t) \rightarrow dx = x'(t) dt \rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_{t_n}^{t_e} f(x(t)) x'(t) dt;$$

Замечание: При замене переменных в определённом интеграле обязательно меняются пределы интегрирования. Для нахождения новых пределов интегрирования  $t_e, t_n$  необходимо подставить вместо  $x$  формулу замены  $x = x(t)$  старые пределы интегрирования  $a, b$ , т.е.  $a = x(t_n); b = x(t_e)$

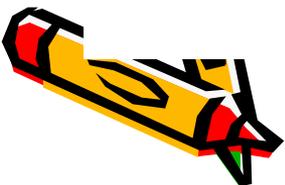
Вычислим значение интегралов левой и правой части по формуле Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_{t_n}^{t_e} f(x(t)) x'(t) dt = F(x(t)) \Big|_{t_n}^{t_e} = F(x(t_e)) - F(x(t_n)) = F(b) - F(a)$$

Получилось одно и то же выражение, значит формула замены верна.

Замечание: При замене переменных в определённом интеграле обратная замена не осуществляется т.к. результатом этого интеграла является число.





## Интегрирование по частям.

Вычислим дифференциал произведения двух непрерывных и дифференцируемых функций:  $d(uv) = vdu + udv$

Проинтегрируем левую и правую части:  $\int_a^b d(uv) = uv = \int_a^b u dv + \int_a^b v du \rightarrow$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du - \text{формула интегрирования по частям.}$$

© 2010, Фёдоров Павел Борисович



## Определённый интеграл на отрезке симметричном относительно нуля.

$$\int_{-a}^a f(x) dx \stackrel{\text{8-е свойство}}{=} \underbrace{\int_{-a}^0 f(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^a f(x) dx}_{I_2} \rightarrow I = I_1 + I_2$$

Для того чтобы исследовать поведение интеграла на чётность и нечётность осуществим замену переменной.

$$x = -t, dx = -dt, \quad -a = -t_n \rightarrow t_n = a; \quad 0 = t_e \rightarrow t_e = 0, \quad \rightarrow I_1 = -\int_a^0 f(-t) dt$$

1 случай:  $f(x)$  - нечётная.

$$I_1 = \int_a^0 f(t) dt = -\int_0^a f(t) dt = -\int_0^a f(x) dx \rightarrow I_1 = -I_2 \rightarrow I = 0 \rightarrow \text{интеграл на отрезке симметричном}$$

относительно нуля от нечётной функции равен нулю.

2 случай:  $f(x)$  - чётная.

$$I_1 = \int_a^0 f(t) dt = \int_0^a f(x) dx \rightarrow I_1 = I_2 \rightarrow I = 2I_2 \rightarrow \text{интеграл на отрезке симметричном}$$

относительно нуля от чётной функции равен двум интегралам на половинном отрезке.

