Определенный интеграл

1 часть

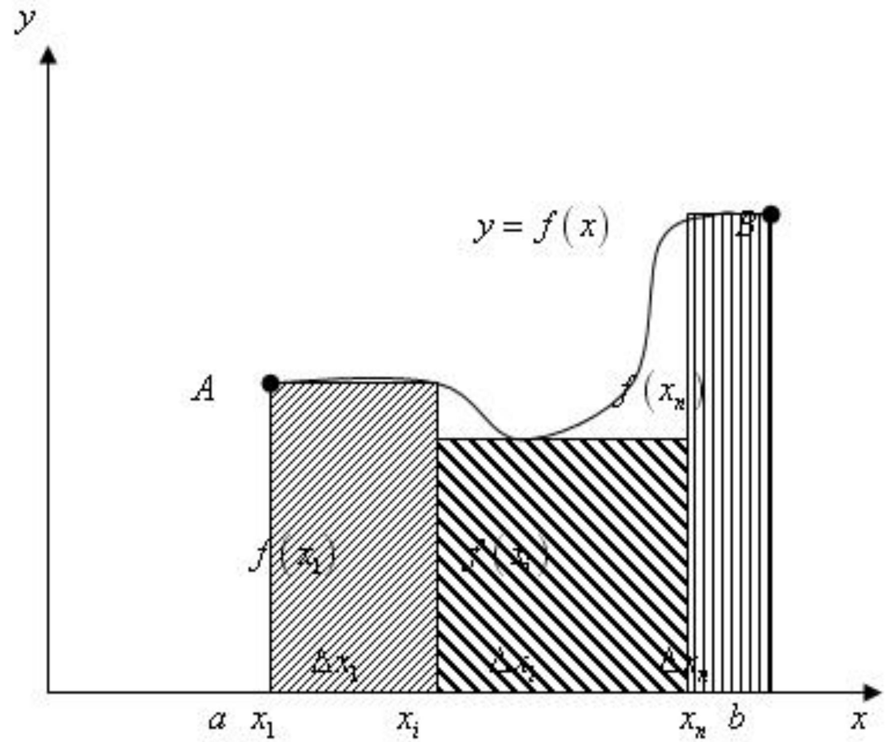
Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Понятие и геометрический смысл определённого интеграла.

Свойства определённого интеграла.

Понятие и геометрический смысл определённого интеграла.

Понятие определённого интеграла выведем на примере вычисления площади криволинейной трапеции.



Дано: $y=f(x)$ -непрерывна на отрезке $[a,b]$

Определить: $SaABb$ – ? $aABb$ – криволинейная трапеция.

Решение.

Разобьём отрезок $[a,b]$ на n частей, длиной Δx_i. Через границы каждой части проводим прямые параллельные оси ординат, в результате чего криволинейная трапеция разбивается также на n частей. Внутри каждой части выбираем произвольную точку x_i и вычисляем значение функции выбранной точки $f(x_i)$. Площадь каждой части криволинейной трапеции приближённо заменяем площадью прямоутольника со сторонами Δx_i и $f(x_i)$. Тогда площадь каждой части $S_i \approx f(x_i)\Delta x_i$

Площадь всей криволинейной трапеции приближенно: $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$. Точное число

получим, если число участков стремится к бесконечности: $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$

Определение: Определённым интегралом называется предел, составленной интегральной суммы, если этот предел не зависит от способа разбиения на участки и выбора точек внутри каждого участка.

Обозначение определённого интеграла: $S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, где a,b – нижняя верхняя границы отрезка интегрирования $[a,b]$ называемые нижним и верхним пределами интегрирования.

Свойства определённого интеграла.

1. Определённый интеграл от константы равен самой этой константе, умноженной на длину отрезка интегрирования.

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{a} c\Delta x_i = c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{a}\Delta x_i = c(b-a)$$

2. Константу можно выносить за знак определённого интеграла.

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} cf(x_i)\Delta x_i = c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = c\int_a^b f(x)\,dx$$

3. Определённый интеграл от суммы двух функций равен сумме определённых интегралов, вычисленных от каждой функции в отдельности.

$$\int_a^b \left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f_1(x_i)+f_2(x_i)\right]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_1(x_i)\Delta x_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_2(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

4. Если для двух функций выполняется следующее неравенство $f_1(x) \le f_2(x)$, то для определённых интегралов, вычисленных от этих функций на одном и том же отрезке интегрирования, выполняется тот же знак неравенства.

Вычислим разность интегралов:

$$\int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx \overset{3\,свойство}{=} \int_a^b \underbrace{\left[f_2(x) - f_1(x)\right]}_{\ge 0} \overbrace{dx}^{\ge 0} \ge 0 \rightarrow \quad \int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx$$

5. Оценка интеграла снизу и сверху.

Если на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет соответственно $\min(m)$ и $\max(M)$ значения, то определённый интеграл лежит в следующих пределах:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

По условию: $m \le f(x) \le M$. Вычислим определённый интеграл от каждой части этого неравенства.

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x) \le \int_a^b Mdx \rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6. Теорема о среднем.

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a,b]$, то $\exists x_0 \in (a,b)$, в которой выполняется следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$$

Доказательство:

По пятому свойству имеем $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$. По свойствам непрерывных функций на отрезке, непрерывная функция на этом отрезке обязательно имеет $\min$ и $\max$ значение.

$$m \le f(x) \le M \to m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

Всегда можно подобрать из бесчисленного множества значение $x \in [a,b]$ число x, при котором будут равны средние части этих неравенств.

$$f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \to \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$$

7. При смене мест пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$

Это свойство следует из того, что для интеграла стоящего в правой части Δx будет отрицательный.

8. Разбиение отрезка интегрирования на части.

Для любых чисел a, b, c выполняется следующее неравенство:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

1 случай: $c \in (a, b)$, $n = n_1 + n_2$

●– – –●– – – – – – – – –●
a c b

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n_1\to\infty}\sum_{i=1}^{n_1} f(x_i)\Delta x_i + \lim_{n_2\to\infty}\sum_{i=1}^{n_2} f(x_i)\Delta x_i = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

2 случай: $c \notin [a, b]$

●– – –●– – – – – – – – –●
a b c

по 1случаю:

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_b^c f(x)\,dx \to \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx \underbrace{-\int\limits_b^c f(x)\,dx}_{7\ \text{свойство}} \to \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$