«Признаки монотонности функции»

Теорема: Для того чтобы функция f(x), дифференцируемая на [a,b] возрастала (убывала) на [a,b] необходимо и достаточно, чтобы $\forall\ x \in [a,b]$ выполнялось неравенство $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Доказательство :

Необходимость : пусть f(x) возрастет на [a,b] $\rightarrow$ при $x_1 < x_2$ ($\forall\ x_1, x_2 \in [a,b]$) $f(x_1) < f(x_2) \rightarrow$ $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) > 0$ и $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$ $\rightarrow f'(x) = \lim \Delta y / \Delta x > 0$, ч.т.д.

Достаточность : пусть $\forall\ x \in [a,b]$ $f'(x) > 0$. Выберем $x_1, x_2 \in [a,b]$ и на $[x_1, x_2]$ применим теорему Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(x) \times (x_2 - x_1)$ ($\forall\ x \in [x_1, x_2]$). По условию $f'(x) > 0$, $x_1 < x_2$ $\rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \rightarrow$ f(x) возрастет, ч.т.д.

“ Экстремум функции и необходимый признак его существования ”

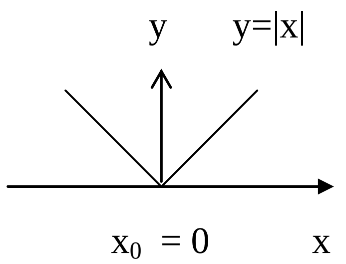
Определение: Точка x_0 называется критической, если производная в этой точке равна нулю или бесконечности, или не существует.

Теорема: Если функция f(x) непрерывна $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$ и x_0 – точка экстремума, то x_0 – критическая точка.

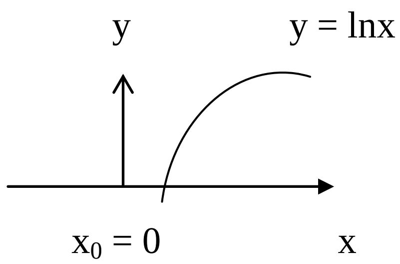
Доказательство:

Пусть f(x) дифференцируема $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0) \rightarrow$ по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$.
Пусть f(x) не дифференцируема в т. x_0, но непрерывна $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0) \rightarrow f'(x_0) = \infty$ или не существует $\rightarrow x_0$ – критическая точка, ч.т.д.

Например:



$f'(x_0)$ – не существует



$f'(x_0) = 1/x_0 = \infty$

Замечание: необходимый признак не является достаточным.

Например : $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \rightarrow x_0 = 0$ из условия $f'(x_0) = 0$, но кубическая парабола $f(x) = x^3$ не имеет экстремума.

“ Достаточный признак экстремума по 1 производной ”

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна в критической т. x_0, дифференцируема $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$ и $f'(x)$ меняет знак в $O_\varepsilon(x_0)$, то при прохождении т. x_0 слева направо $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус для максимума и с минуса на плюс для минимума.

Доказательство :

Пусть $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус.
Выберем $x_1, x_2 \in O_\varepsilon(x_0)$ $(x_1 < x_0 < x_2)$ и на $[x_1, x_0]$, $[x_0, x_2]$ применим теорему Лагранжа:
на $[x_1, x_0]$: $f(x_0) - f(x_1) = f'(x) \times (x_0 - x_1)$. По условию $f'(x) > 0 \rightarrow f(x_0) - f(x_1) > 0 \rightarrow f(x_1) < f(x_0)$,
на $[x_0, x_2]$: $f(x_2) - f(x_0) = f'(x) \times (x_2 - x_0)$. По условию $f'(x) < 0 \rightarrow f(x_2) - f(x_0) < 0 \rightarrow f(x_2) < f(x_0)$.
$\rightarrow f(x_0) > f(x)\ \forall\ x \in O_\varepsilon(x_0) \rightarrow$ в т. x_0 функция $f(x)$ достигает своего максимума, ч.т.д.

“ Достаточный признак экстремума по 2 и n - ой производной ”

Теорема: Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$ и $f''(x_0) = 0$, то $f''(x_0) < 0$ для максимума и $f''(x_0) > 0$ для минимума.

Доказательство:

Пусть $f''(x_0) < 0$. Разложим функцию $f(x)$ в $O_\varepsilon(x_0)$ по формуле Тейлора с точностью до 2-ой производной: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) + f''(x_0)\ ) \times (x - x_0)^2 / 2$.
По условию теоремы $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0 \rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \rightarrow f(x) < f(x_0)\ \forall\ x \in O_\varepsilon(x_0) \rightarrow$ в т. x_0 функция $f(x)$ достигает своего максимума, ч.т.д.

Замечание : Достаточный признак экстремума по 2 производной не применим, если $f'(x_0) = \infty$ или не существует.

Теорема: Если функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$ и $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то в т. x_0 функция $f(x)$ не имеет экстремума при n – нечетном, а при n – четном $f^{(n)}(x_0) < 0$ для максимума и $f^{(n)}(x_0) > 0$ для минимума.

Например: $f(x) = x^5 - 4$

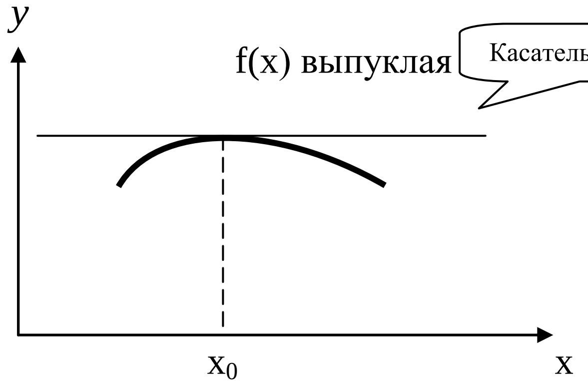
$f'(x) = 5x^4 \rightarrow x_0 = 0$ из условия $f'(x_0) = 0$.
$f''(x) = 20x^3$, $f''(x_0) = 0$; $f'''(x) = 60x^2$, $f'''(x_0) = 0$; $f''''(x) = 120x$, $f''''(x_0) = 0$;
$f'''''(x) = 120$, $f'''''(x_0) \neq 0$, степень 5 - нечетная $\rightarrow f(x)$ не имеет экстремума.

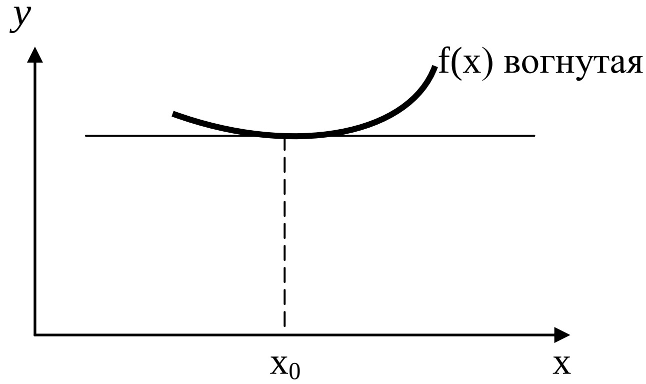
“ Понятие выпуклости, вогнутости и точки перегиба ”

Определение: Функция f(x) называется выпуклой (вогнутой) в $O_\varepsilon(x_0)$, если $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$ график функции f(x) лежит ниже (выше)
касательной, проведенной к графику функции в т. x_0.

Определение: Функция f(x) называется выпуклой (вогнутой) на [a,b], если она выпуклая (вогнутая) $\forall\ x \in [a,b]$.

Определение : Точка x_0, отделяющая интервалы выпуклости и вогнутости, называется точкой перегиба.

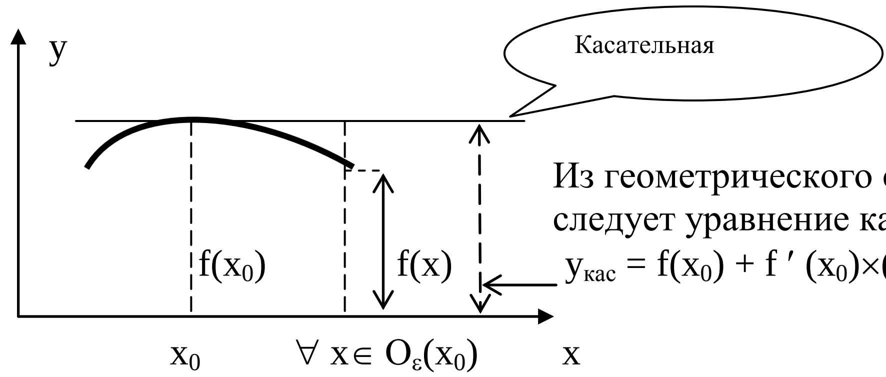




“ Необходимый и достаточный признак выпуклости, вогнутости”

Теорема: Для того чтобы функция f(x), дважды непрерывно дифференцируема $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$, была выпуклой (вогнутой) необходимо и достаточно, чтобы $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$) $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$.

Доказательство :



Из геометрического смысла производной следует уравнение касательной к графику
$y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)\times(x - x_0)$. (1)

Разложим функцию f(x) в $O_\varepsilon(x_0)$ по формуле Тейлора с точностью до второй производной : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\times(x - x_0) + f''(x_0)\ )\times(x - x_0)^2/2$. (2)

Вычислим разность (1) – (2) : $y_{кас} - f(x) = -f''(x_0)\times(x - x_0)^2/2$. (3)

Необходимость : пусть f(x) выпуклая $\rightarrow y_{кас} > f(x)$ (смотри рисунок) $\rightarrow y_{кас} - f(x) > 0 \rightarrow$
$-f''(x_0) > 0 \rightarrow f''(x_0) < 0$, ч.т.д

Достаточность : пусть $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$ $f''(x_0) < 0 \to -f''(x_0) > 0$ в формуле (3)$\to y_{кас} - f(x) > 0 \to$ $y_{кас} > f(x) \ \to\ f(x)$ выпуклая, ч.т.д.

“ Точка перегиба: необходимый и достаточный признаки”

Теорема: Точка перегиба: необходимый признак.

Если функция f(x) дважды непрерывно дифференцируема $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$ и x_0 – точка перегиба, то $f''(x_0)$ равна нулю или бесконечности, или не существует.

Доказательство:

Если x_0 – точка перегиба, то по определению интервал выпуклости сменяется интервалом вогнутости $\to$ при $x < x_0$ f(x) выпуклая $\to$ $f''(x) < 0$, а при $x > x_0$ f(x) вогнутая $\to$ $f''(x) > 0$. Решая систему неравенств : $f''(x) < 0$ и $f''(x) > 0$
$\to$ $f''(x_0) = 0$ или бесконечности, или не существует, ч.т.д.

Теорема: Точка перегиба: достаточный признак.

Если функция f(x) дважды непрерывно дифференцируема $\forall\ x \in O_\varepsilon(x_0)$ и
$f''(x_0) = 0$ или бесконечности, или не существует, и $f''(x)$ меняет знак в $O_\varepsilon(x_0)$,
то x_0 – точка перегиба.

Доказательство:

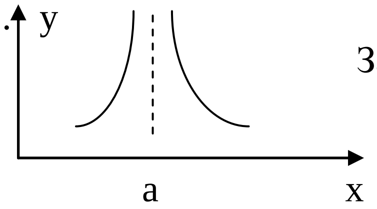
при $x < x_0$ $f''(x) < 0 \to$ f(x) выпуклая, при $x > x_0$ $f''(x) > 0 \to$ f(x) вогнутая$\to$ интервал выпуклости сменяется интервалом вогнутости $\to$ по определению x_0 – точка перегиба, ч.т.д.

Асимптоты графика функции

Определение: Прямая L называется асимптотой графика функции f(x), если расстояние от т. M $\in$ f(x) до этой прямой стремиться к нулю при неограниченном удалении т. M от начала координат.

Теорема: Вертикальная асимптота

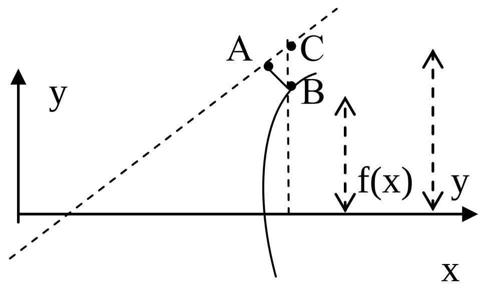
Для того, чтобы прямая x = a являлась вертикальной асимптотой графика функции f(x), необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$



Замечание: вертикальные асимптоты соответствуют точкам разрыва 2 рода.

Теорема: Наклонная асимптота

Прямая y = k x + b является наклонной асимптотой графика функции f(x), если $k = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) / x)$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - k x)$.



Доказательство:

AB = BC cos φ, φ ∠ ABC, φ ≠ π / 2, т.к. y = k x + b наклонная асимптота, а не вертикальная асимптота.

$AB = \lim\limits_{x \to \infty} AB = \lim\limits_{x \to \infty} BC \cos\varphi = \cos\varphi \lim\limits_{x \to \infty} BC =$

$= \cos\varphi \lim\limits_{x \to \infty} (y - f(x)) = \cos\varphi \lim\limits_{x \to \infty} (k x + b - f(x)) = 0.$

y = k x + b

$\to \lim\limits_{x \to \infty} (k x + b - f(x)) = 0. \to \lim\limits_{x \to \infty} x \lim\limits_{x \to \infty} (k + b / x - f(x) / x) = 0.$

$\to \lim\limits_{x \to \infty} k + \lim\limits_{x \to \infty} (b / x) - \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) / x)) = 0. \quad \to k = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) / x)$, ч.т.д.

$y = k x + b \to b = y - k x \to$ при $x \to \infty \quad y \to f(x) \to b = \lim\limits_{x \to \infty} b = \lim\limits_{x \to \infty} (y - k x) \to$

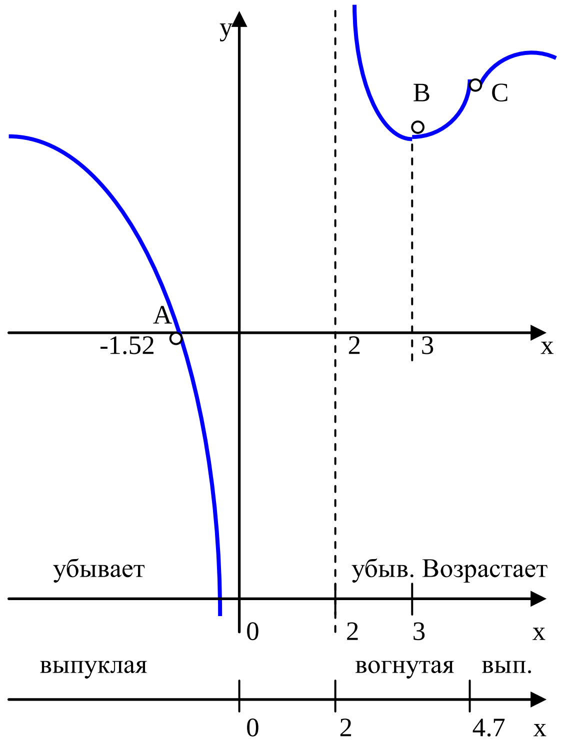
$\to b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - k x)$, ч.т.д.

Замечания:
1. Если k или b = ∞ или не существуют, то наклонной асимптоты нет.
2. Если пределы существуют только при x → + ∞, то асимптота называется правосторонней.
3. Если пределы существуют только при x → - ∞, то асимптота называется левосторонней.
4. Если k = 0. b ≠ ∞ , то асимптота называется горизонтальной.

Схема исследования функции и построение графика

1. Область определения функции (0.5 б.)
2. Четность, нечетность или общий вид (0.5 б.)
   Если $f(-x) = f(x)$ – четная. Если $f(-x) = - f(x)$ – нечетная. Если $f(-x) \neq \pm f(x)$ - общий вид.
   Четная функция симметрична относительно оси ординат, нечетная – симметрична относительно начала координат.
3. Точки пересечения с осями координат. (0.5 б.)
4. Точки разрыва и их классификация, вычисление односторонних пределов (1 б.)
5. Асимптоты. (2 б.)
6. Критические точки по 1 производной. Участки возрастания и убывания. Экстремум функции. (1 б.)
7. Значение функции в т. экстремума и на границах области определения (0.5 б.)
8. Критические точки по 2 производной. Участки выпуклости и вогнутости.
   Точки перегиба. (3 б.)
9. Построение графика функции. (1 б.)

$$y = \ln \frac{x^3}{x-2}$$



Пример №1

1. $\dfrac{x^3}{x-2} > 0 \to x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ – область определения
2. $f(-x) \neq \pm f(x)$ - общий вид.
3. $x \neq 0 \to$ т. пересечения с осью ординат нет.

   $y = 0 \to e^0 = x^3/(x-2) = 1 \to x^3 - x + 2 = 0 \to x \cong -1.52$; A(-1.52,0);
4. $x = 0{,}2$ – т. разрыва 2 рода. $\lim\limits_{x \to 2+0} (x^3/(x-2)) = \infty$

   $\lim\limits_{x \to 0-0} (x^3/(x-2)) = -\infty$
5. $x = 0{,}2$ – вертикальные асимптоты.

   $k = \lim \ln(x^3/(x-2))/x = [\infty/\infty]$ - правило Лопиталя

   $$y' = \frac{x-2}{x^3} \cdot \frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2} = \frac{2(x-3)}{x(x-2)}$$

   $$k = \lim_{x \to \infty} \frac{2(x-3)}{x(x-2)} = 0; b = \lim_{x \to \infty} \ln(x^3/(x-2)) = \ln \lim_{x \to \infty}(x^3/(x-2)) = \infty$$

   - наклонных асимптот нет.
6. $y' = \dfrac{2(x-3)}{x(x-2)} = 0 \to x = 3$; $y' = \infty \to x = 0$; $x = 2$; критические точки на экстремум

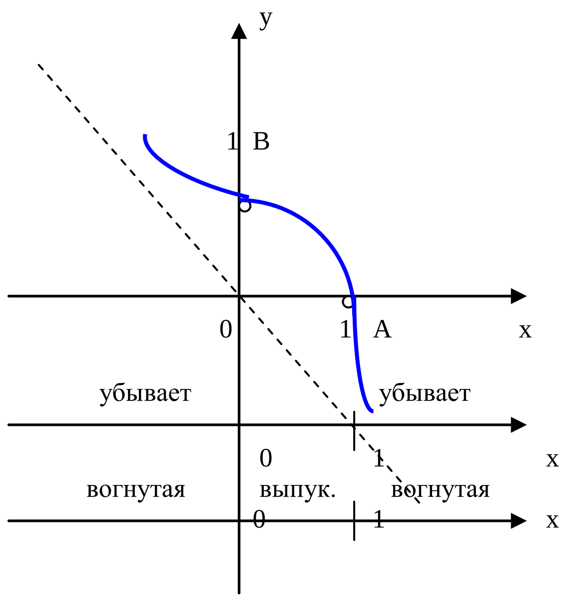
   $y'(-1) < 0$; $y'(2.5) < 0$; $y'(3) > 0$; $x = 3$ – min.
7. $y'(3) = \ln 27 \cong 3.3$; B(3, 3.3);
8. $$y'' = 2\frac{x^2 - 2x - (2x-2)(x-3)}{x^2(x-2)^2} = \frac{x^2 - 6x + 6}{x^2(x-2)^2}$$

   $y'' = 0 \to x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3} \to x \cong 4.7$; ($x \cong 1.3$ – не принадлежит области определения);

   $y'' = \infty \to x = 0$; $x = 2$;

   $y''(-1) < 0$; $y''(-4) > 0$; $y''(5) < 0$; C(4.7, 3.6); -т.перегиба

$$y = \sqrt[3]{1-x^3}$$



Пример №2

1. $x \in (-\infty, \infty)$; 2. $f(-x) \neq \pm f(x)$ - общий вид.
3. $y=0 \to x = 1$; $x=0 \to y = 1$; A(1,0); B(0,1);
4. т. разрыва нет. 5. вертикальных асимптот нет.

   $k = \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{(1-x^3)}/x = -1$; $b = \lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt[3]{(1-x^3)} + x) =$

   Умножаем и делим на неполный квадрат разности

   $$= \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt[3]{(1-x^3)} + x)(\sqrt[3]{(1-x^3)^2} - \sqrt[3]{(1-x^3)}\,x + x^2)}{(\sqrt[3]{(1-x^3)^2} - \sqrt[3]{(1-x^3)}\,x + x^2)}$$

   $$= \lim_{x \to \infty} \frac{1-x^3+x^3}{(\sqrt[3]{(1-x^3)^2} - 2\sqrt[3]{(1-x^3)}\,x + x^2)} = 0;$$

   $y = -x$ – наклонная асимптота.
6. $$y' = 1/3\,(1-x^3)^{-2/3}(-3x^2) = -\frac{x^2}{(1-x^3)^{2/3}}$$

   $y' = 0 \to x = 0$; $y' = \infty \to x = 1$; $y'(-1) < 0$; $y'(0{,}5) < 0$; $y'(2) < 0$;
7. Экстремума нет.
8. $$y'' = \frac{2x(1-x^3)^{2/3} - x^2\,2/3\,(1-x^3)^{-1/3}(-3x^2)}{(1-x^3)^{4/3}} = -2\frac{x}{(1-x^3)^{5/3}}$$

   $y'' = 0 \to x = 0$; $y'' = \infty \to x = 1$;

   $y''(-1) > 0$; $y''(1/2) < 0$; $y''(2) > 0$;

   A(0,1); B(1,0); -т. перегиб

Формулы Тейлора и Маклорена

Эти формулы используются для представления функции f(x), имеющей все производные до (n+1) порядка включительно, в виде многочлена $P_n(x)$ $\forall x \in O_\varepsilon(x_0)$ (Такое представление функции называет её разложением).

Исходными данными для разложения функции являются совпадение функции и многочлена, а также их производных в точке x_0:

$$f(x_0)=P_n(x_0); \quad (1) \quad f'(x_0)=P_n'(x_0); \quad (2) \quad f''(x_0)=P_n''(x_0); \quad (3) \quad \ldots \quad f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0). \quad (4)$$

Вид разложения: $f(x)=P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n$ (5)

Найдем коэффициенты многочлена (5) из условий (1),(2),(3),…(4)

Из (1) $f(x_0)=P_n(x_0); \to f(x_0)=a_0.$ (6)

Для того, что бы использовать условия (2),(3),…(4) необходимо предварительно искать соответствующую производную.

$$f'(x)=P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\ldots+n\cdot a_n(x-x_0)^{n-1}$$

Из (2) $f'(x_0)=P_n'(x_0) \to f'(x_0)=a_1.$ (7)

$$f''(x)=P_n''(x)=2a_2+\ldots+n\cdot(n-1)\cdot a_n(x-x_0)^{n-2}$$

Из (3) $f''(x_0)=P_n''(x_0); \to f''(x_0)=2a_2 \to a_2=\dfrac{f''(x_0)}{2}.$ (8)

…………………………………………………………

$$f^{(n)}(x)=P_n^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1a_n=n!a_n.$$

Из (4) $f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0) \to f^{(n)}(x_0)=n!a_n \to a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$ (9)

Определение: Факториалом числа n называется произведение натуральных чисел от 1 до n. Обозначается n! = $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$;

Подставляем найденные коэффициенты многочлена (6), (7), (8), …, (9) в многочлен (5), с учетом того, что 1=1!; 2=2!.

$$f(x)=P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (10)$$

- формула Тейлора.

Функция и многочлен, стоящие в левой и правой части формулы (10) совпадают только в точках, заданных условиями (1),(2),(3),…(4)

В остальных точках $x \in O_{\varepsilon}(x_0)$ между функцией и многочленом есть какая-то разница. Обозначим эту разницу $R_n(x)$, тогда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

$R_n(x)$ - называется остаточным членом, полученным в форме Лагранжа, и имеет следующий вид: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \overline{x} \in (x, x_0);$.

Если $R_n(x)$ будет меньше заданной точности ε, то исходная функция будет разложима по формуле (10) с этой точностью.

Замечание: Точка x_0 выбирается из условия, чтобы функция и её производные в этой точке существовали и значения функции в этой точке можно было легко вычислить без использования таблиц, ЭВМ и т.п.

В частном случая, если $x_0 = 0$ формула Тейлора (10) становится формулой Маклорена:

$$f(x) = P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (11)$$

Пример. Вычислить значение числа e с помощью формулы Маклорена с точностью до $\varepsilon = 0.01$.

Рассмотрим функцию: $f(x) = e^x;$

Все производные этой функции равны e^x. Значение этой функции и её производных равны $e^0 = 1$.

Тогда формула (11) будет иметь вид: $f(x) = e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{1}{n!}x^n$ (12). Подставляем в формулу (12) x = 1 $f(x) = e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ (13)

Вычисляем значения слагаемых формулы (13) до такого из них, которое окажется меньшим заданной точности:

$$f(x) = e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \underbrace{\frac{1}{120}}_{<\varepsilon=0.01} = 1 + 1 + 0.5 + 0.166 + 0.041 = 2.707$$