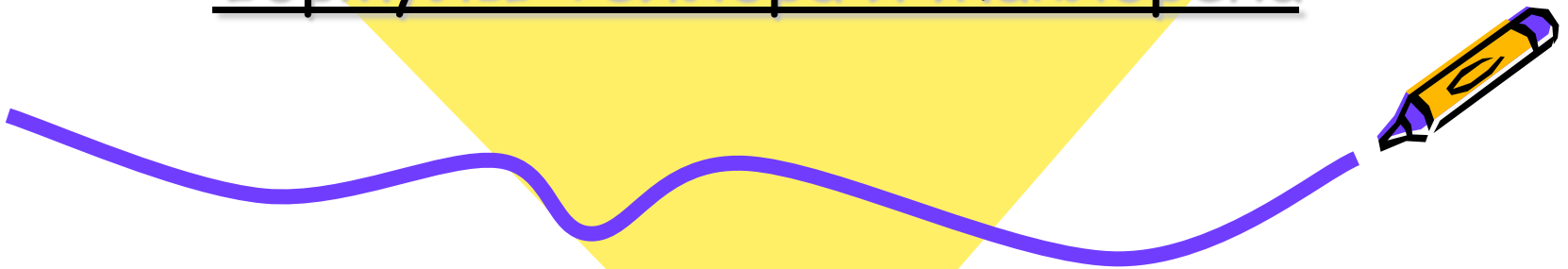


ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ 2 часть

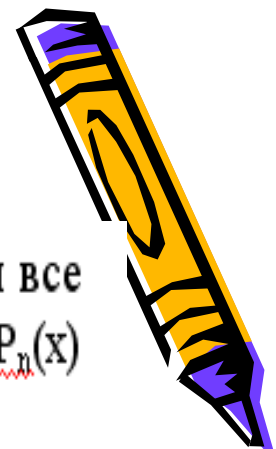


Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Формулы Тейлора и Маклорена



Формулы Тейлора и Маклорена



Эти формулы используются для представления функции $f(x)$, имеющей все производные до $(n+1)$ порядка включительно, в виде многочлена $P_n(x)$ $\forall x \in O_f(x_0)$ (Такое представление функции называют её разложением).

Исходными данными для разложения функции являются совпадение функции и многочлена, а также их производных в точке x_0 :

$$f(x_0) = P_n(x_0); \quad (1) \quad f'(x_0) = P'_n(x_0); \quad (2) \quad f''(x_0) = P''_n(x_0); \quad (3) \quad \dots$$

$$f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}_n(x_0). \quad (4)$$

$$\text{Вид разложения: } f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n \quad (5)$$

© 2010, Фёдоров Павел Борисович





Найдем коэффициенты многочлена (5) из условий (1),(2),(3),... (4)

Из (1) $f(x_0) = P_n(x_0); \rightarrow f(x_0) = a_0.$ (6)

Для того, что бы использовать условия (2),(3),... (4) необходимо предварительно искать соответствующую производную.

$$f'(x) = P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$$

Из (2) $f'(x_0) = P_n'(x_0) \rightarrow f'(x_0) = a_1.$ (7)

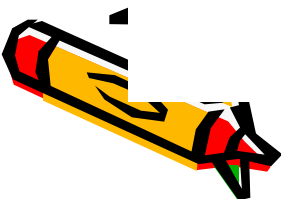
$$f''(x) = P_n''(x) = 2a_2 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-2}$$

Из (3) $f''(x_0) = P_n''(x_0); \rightarrow f''(x_0) = 2a_2 \rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}.$ (8)

.....
 $f^{(n)}(x) = P_n^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 a_n = n! a_n.$

Из (4) $f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) \rightarrow f^{(n)}(x_0) = n! a_n \rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$ (9)

Определение: Факториалом числа n называется произведение натуральных чисел от 1 до n . Обозначается $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$;





Подставляем найденные коэффициенты многочлена (6), (7), (8), ..., (9) в многочлен (5), с учетом того, что $1=1!$; $2=2!$.

$$f(x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (10)$$

- формула Тейлора.

Функция и многочлен, стоящие в левой и правой части формулы (10) совпадают только в точках, заданных условиями (1),(2),(3),... (4)

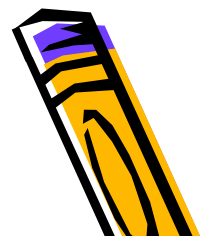
В остальных точках $x \in O_\varepsilon(x_0)$ между функцией и многочленом есть какая-то разница. Обозначим эту разницу $R_n(x)$, тогда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

$R_n(x)$ - называется остаточным членом, полученным в форме Лагранжа, и имеет

следующий вид: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $\bar{x} \in (x, x_0)$;

Если $R_n(x)$ будет меньше заданной точности ε , то исходная функция будет разложима по формуле (10) с этой точностью.





Замечание: Точка x_0 выбирается из условия, чтобы функция и её производные в этой точке существовали и значения функции в этой точке можно было легко вычислить без использования таблиц, ЭВМ и т.п.

В частном случае, если $x_0 = 0$ формула Тейлора (10) становится формулой

Маклорена:
$$f(x) = P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (11)$$





Пример. Вычислить значение числа e с помощью формулы Маклорена с точностью до $\varepsilon = 0.01$.

Рассмотрим функцию: $f(x) = e^x$;

Все производные этой функции равны e^x . Значение этой функции и её производных равны $e^0 = 1$.

Тогда формула (11) будет иметь вид: $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$ (12).

Подставляем в формулу (12) $x = 1$ $f(x) = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ (13)

Вычисляем значения слагаемых формулы (13) до такого из них, которое окажется меньшим заданной точности:

$$f(x) = e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{\underbrace{120}_{<\varepsilon=0.01}} = 1 + 1 + 0.5 + 0.166 + 0.041 = 2.707$$

