ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ
2 часть

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

Формулы Тейлора и Маклорена

Формулы Тейлора и Маклорена

Эти формулы используются для представления функции f(x), имеющей все производные до (n+1) порядка включительно, в виде многочлена $P_n(x)$ $\forall x \in O_\varepsilon(x_0)$ (Такое представление функции называет её разложением).

Исходными данными для разложения функции являются совпадение функции и многочлена, а также их производных в точке x_0:

$f(x_0) = P_n(x_0);$ (1) $f'(x_0) = P_n'(x_0);$ (2) $f''(x_0) = P_n''(x_0);$ (3) …

$f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0).$ (4)

Вид разложения: $f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$ (5)

Найдем коэффициенты многочлена (5) из условий (1),(2),(3),…(4)

Из (1) $f(x_0) = P_n(x_0); \to f(x_0) = a_0.$ (6)

Для того, что бы использовать условия (2),(3),…(4) необходимо предварительно искать соответствующую производную.

$$f'(x) = P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots + n \cdot a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Из (2) $f'(x_0) = P_n'(x_0) \to f'(x_0) = a_1.$ (7)

$$f''(x) = P_n''(x) = 2a_2 + \ldots + n \cdot (n-1) \cdot a_n (x - x_0)^{n-2}$$

Из (3) $f''(x_0) = P_n''(x_0); \to f''(x_0) = 2a_2 \to a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2}.$ (8)

………………………………………………………………

$$f^{(n)}(x) = P_n^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 a_n = n! a_n.$$

Из (4) $f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) \to f^{(n)}(x_0) = n! a_n \to a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$ (9)

Определение: Факториалом числа n называется произведение натуральных чисел от 1 до n. Обозначается $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$;

Подставляем найденные коэффициенты многочлена (6), (7), (8), …, (9) в многочлен (5), с учетом того, что 1=1!; 2=2!.

$$f(x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (10)$$

- формула Тейлора.

Функция и многочлен, стоящие в левой и правой части формулы (10) совпадают только в точках, заданных условиями (1),(2),(3),…(4)

В остальных точках $x \in O_\varepsilon(x_0)$ между функцией и многочленом есть какая-то разница. Обозначим эту разницу $R_n(x)$, тогда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

$R_n(x)$ - называется остаточным членом, полученным в форме Лагранжа, и имеет следующий вид: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \bar{x} \in (x, x_0);$.

Если $R_n(x)$ будет меньше заданной точности ε, то исходная функция будет разложима по формуле (10) с этой точностью.

Замечание: Точка x_0 выбирается из условия, чтобы функция и её производные в этой точке существовали и значения функции в этой точке можно было легко вычислить без использования таблиц, ЭВМ и т.п.

В частном случая, если $x_0 = 0$ формула Тейлора (10) становится формулой Маклорена: $f(x) = P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ (11)

Пример. Вычислить значение числа e с помощью формулы Маклорена с точностью до $\varepsilon = 0.01$.

Рассмотрим функцию: $f(x) = e^x$;

Все производные этой функции равны e^x. Значение этой функции и её производных равны $e^0 = 1$.

Тогда формула (11) будет иметь вид: $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$ (12).

Подставляем в формулу (12) x = 1 $f(x) = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ (13)

Вычисляем значения слагаемых формулы (13) до такого из них, которое окажется меньшим заданной точности:

$$f(x) = e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \underbrace{\frac{1}{120}}_{<\varepsilon = 0.01} = 1 + 1 + 0.5 + 0.166 + 0.041 = 2.707$$