ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ
1 часть

Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике: Fedorovkniga.jimdo.com

Теоремы о дифференцируемых функциях.
Правило Лопиталя.

Теорема Ферма.

Определение: Функция $f(x)$ принимает в точке x_0 максимальное значение, если $\forall x \in O_\varepsilon(x_0)$ выполняется следующее неравенство: $f(x) \leq f(x_0)$.

Замечание: Равенство возможно, если $f(x) - const$.

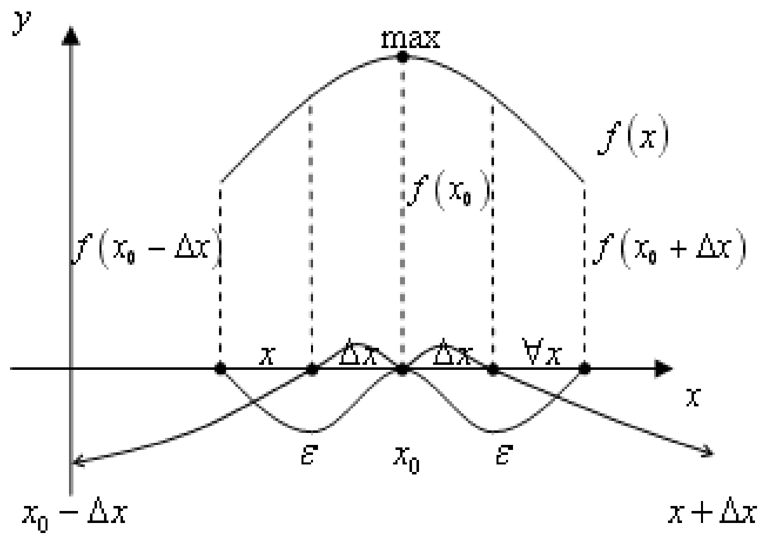
Определение: Функция $f(x)$ принимает в точке x_0 минимальное значение, если $\forall x \in O_\varepsilon(x_0)$ выполняется неравенство: $f(x) \geq f(x_0)$.

Замечание: Максимум и минимум функции обьединяются понятием экстремума функций.

Теорема: Если $f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a,b]$ и в точке $x_0 \in (a,b)$ достигается экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство:

Пусть в точке $f(x_0)$ достигает своего максимума.



Вычислим производную слева и справа от точки x_0:

$$\Delta x < 0;\ \ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{\Delta x}_{<0}} \ge 0, \qquad \Delta x > 0;\ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{\Delta x}_{>0}} \le 0$$

Решаем совместно систему полученных неравенств: $\begin{cases} y' \ge 0 \\ y' \le 0 \end{cases} \to y' = f'(x_0) = 0$

Терема Ролля

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на [a,b] и дифференцируема на (a,b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения, то $\exists x_0 \in (a,b)$, в которой $f'(x_0) = 0$.

Доказательство

1. случай f(x) = const, f(a) = f(b) = C → эта функция удовлетворяет условию теоремы $f'(x) = C' = 0, \forall x \in (a,b) \rightarrow f'(x_0) = 0 \, \forall x_0 \in (a,b)$
2. случай f(x) ≠ const
   По условию функция непрерывна на [a,b] → на [a,b], по свойству непрерывных функций на отрезке, функция имеет на [a,b] минимум и максимум в каких-то точках x_0 и x_1. Пусть $x_0 = a$, $x_1 = b$, тогда по условию теоремы f(a) = f(b) минимум и максимум будут равны, тогда f(x)=const, и по первому случаю $f'(x_0) = 0$. Пусть $x_0 \in (a,b)$, тогда точка экстремума лежит внутри отрезка и по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$. $\rightarrow f'(x_0) = 0 \, \forall x_0 \in (a,b)$

Теорема Коши

Теорема: Если функции f(x) и g(x) непрерывны на [a,b] и дифференцируемы на (a,b) и $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$, то $\exists x_0 \in (a,b)$, в которой выполняется следующее равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad (1)$$

Доказательство

1. Докажем существование формулы (1).

   По условию теоремы $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b) \rightarrow g(b)-g(a) \neq 0$, иначе $g(b)-g(a)=0 \rightarrow g(b)=g(a)$ и по теореме Ролля $g'(x)=0$,

   $\rightarrow$ формула (1) существует.

2. Докажем правильность формулы (1). Для этого составим вспомогательную функцию: $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$

Вычислим значения этой функции на границах отрезка [a,b]:

$$F(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(a)-g(a)]=0;$$

$$F(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(b)-g(a)]=0;$$

Вспомогательная функция на границах отрезка [a,b] принимает одинаковые значения, значит по теореме Ролля $\exists x_0\in(a,b)$, в которой $F'(x_0)=0.$

Вычислим производную $F'(x)=f'(x)-0-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g'(x)-0]$ и её значение в точке x_0:

$$F'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)=0\rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Теорема Лагранжа

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на [a,b] и дифференцируема на (a,b), то $\exists x_0 \in (a,b)$, в которой выполняется следующее равенство:

$$f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$$

Доказательство

Рассмотрим две функции f(x) и g(x) = x. Функция g(x) = x – непрерывная и дифференцируемая функция, значит можно применить для них теорему Коши:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(x_0)}{1}\to f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$$

Правило Лопиталя

Это правило используется для раскрытия неопределенностей вида: $\left[\frac{0}{0}\right];\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

1 случай. Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x \to x_0$

Теорема: Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы $\forall x \in O_\varepsilon(x_0)$ и $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то предел отношения функции равен пределу отношения их производных: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство

Рассмотрим интервал (x_0,x), где $\forall x \in O_\varepsilon(x_0)$ и используем на этом интервале теорему Коши:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})},$$ где $\bar{x}\in(x_0,x); x\to x_0; \bar{x}\to x$.

По условию теоремы $f(x_0)=g(x_0)=0 \to \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Вычислим предел левой и правой части $\to \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

2 случай. Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x \to \infty$

Теорема: Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы $\forall x \in R$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_0) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x_0) = 0$, то предел отношения функции равен пределу отношения их производных: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Доказательство

Замена: $x = \frac{1}{t} \to t = \frac{1}{x}; x \to \infty; t \to 0;$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \overset{1\text{случай}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} \xrightarrow{\text{обратная замена}} \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3 случай. Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при $x \to x_0$

Теорема: Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы $\forall x \in O_\varepsilon(x_0)$ и $f(x_0) = g(x_0) = \infty$, то предел отношения функции равен пределу отношения их производных: $\underset{x \to x_0}{Lim} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x \to x_0}{Lim} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

4 случай. Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при $x \to \infty$

Теорема: Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы $\forall x \in R$ и $\underset{x \to \infty}{Lim} f(x_0) = \underset{x \to \infty}{Lim} g(x_0) = \infty$, то предел отношения функции равен пределу отношения их производных: $\underset{x \to \infty}{Lim} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x \to \infty}{Lim} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Замечание: Если после однократного применения правила Лопиталя неопределенность останется, то это правило используется повторно необходимое число раз.

Пример №1 Переход от произведения к частному

$$\lim_{x\to 0} x^{123} Ln(123x) = [0\times(-\infty)] = \lim_{x\to 0} \frac{Ln(123x)}{x^{-123}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{123x}123}{-123x^{-124}} = \frac{1}{-123} \lim_{x\to 0} x^{123} = 0;$$

Пример №2 Предварительное логарифмирование

$\lim_{x\to 0} 123x^{x^{123}}$. Обозначим $y = 123x^{x^{123}}$. Вычислим натуральный логарифм от левой и правой части $Ln(y) = Ln\left(123x^{x^{123}}\right) = x^{123} Ln(123x)$..Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0} Ln(y) = \lim_{x\to 0} x^{123} Ln(123x) \overset{\text{Пример №1}}{=} 0 \to$$

$$\lim_{x\to 0} Ln(y) = 0 \to \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1 \to \lim_{x\to 0} 123x^{x^{123}} = 1.$$