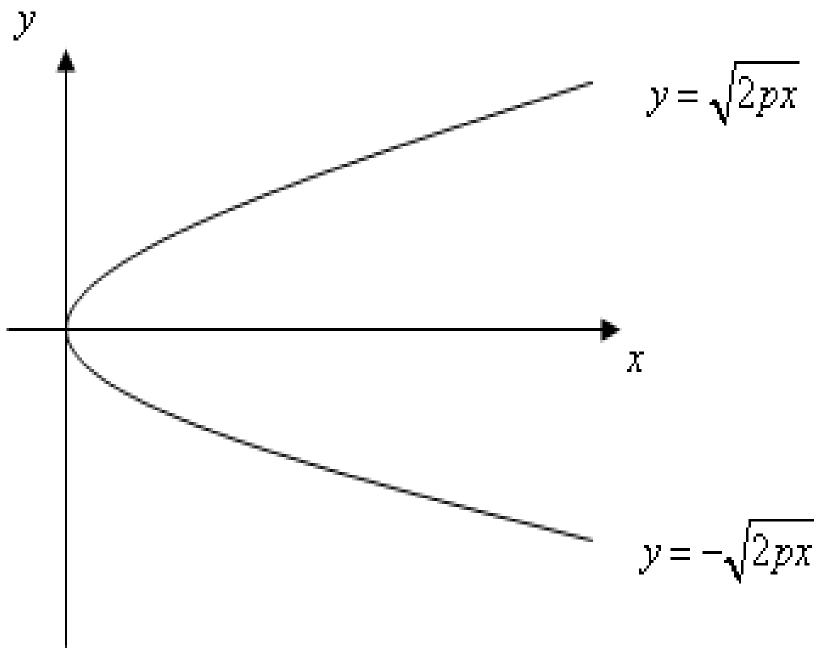
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ часть 2

Фёдоров Павел Борисович
Сайт лекций по математике:
Fedorovkniga.jimdo.com

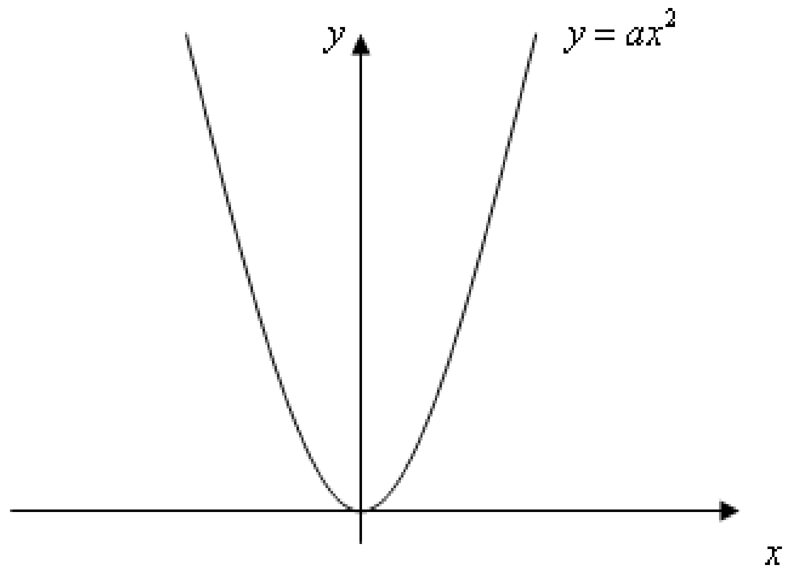
Линии 2-го порядка, каноническое уравнение параболы, эллипса и гиперболы.

1. Парабола:

а) каноническое уравнение: $y^2 = 2px \quad (1)$



в) обыкновенное уравнение: $y = ax^2 \quad (2)$



Каноническое уравнение (1) получается из уравнения (2), если в уравнении (2) поменять местами координаты (x, y).

$$x = ay^2 \to y^2 = \frac{1}{a}x \to 2p = \frac{1}{a}$$

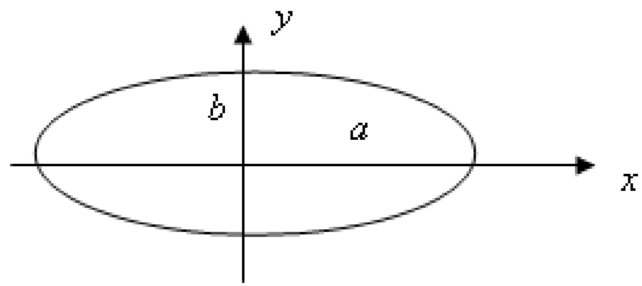
2. Эллипс

Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где a, b – полуоси.

Замечание: Эллипс имеет две оси симметрии (x, y – возводятся в квадрат), поэтому эллипс достаточно настроить в первой четверти, а в остальных четвертях достроить его из соображений симметрии.

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}; \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

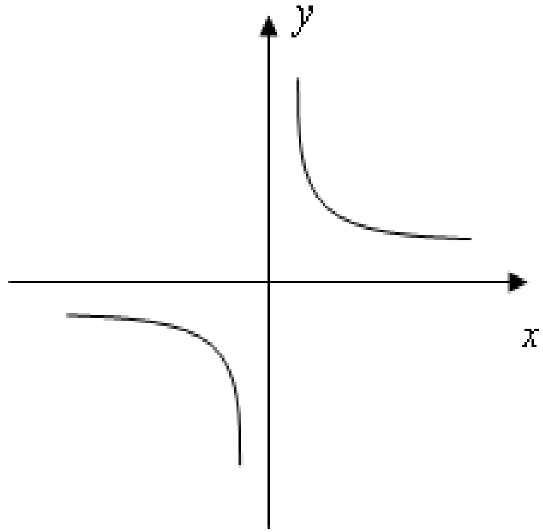
x	0	a	$\frac{a}{2}$
y	b	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}b$



Замечание: Если полуоси $a=b$, то получается частный случай эллипса – окружность.

3. Гипербола

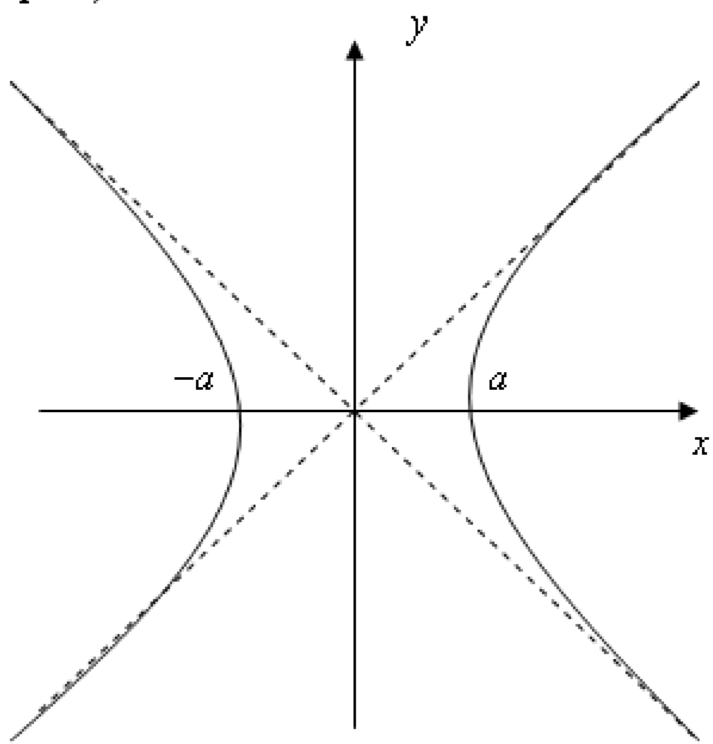
а) обычное уравнение: $y = \dfrac{1}{x}$



б) каноническое уравнение: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Замечание: Гипербола имеет две оси симметрии и в 1 четверти имеет следующее уравнение: $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

Гипербола располагается между прямыми $y = \pm\frac{b}{a}x$ (на рисунке эти прямые показаны пунктиром)



$x = 0, y = \frac{b}{a}\sqrt{-a^2} \rightarrow$ точек пересечения с осью y нет, $y = 0 \rightarrow x = a$

Покажем, что гипербола лежит ниже прямой $y=\frac{b}{a}x$, т.е., что прямой большое ординаты гиперболы в 1 четверти при $x>0$:

$$\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{x}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\to$$

умножим и разделим на сопряжённые скобки выражения:

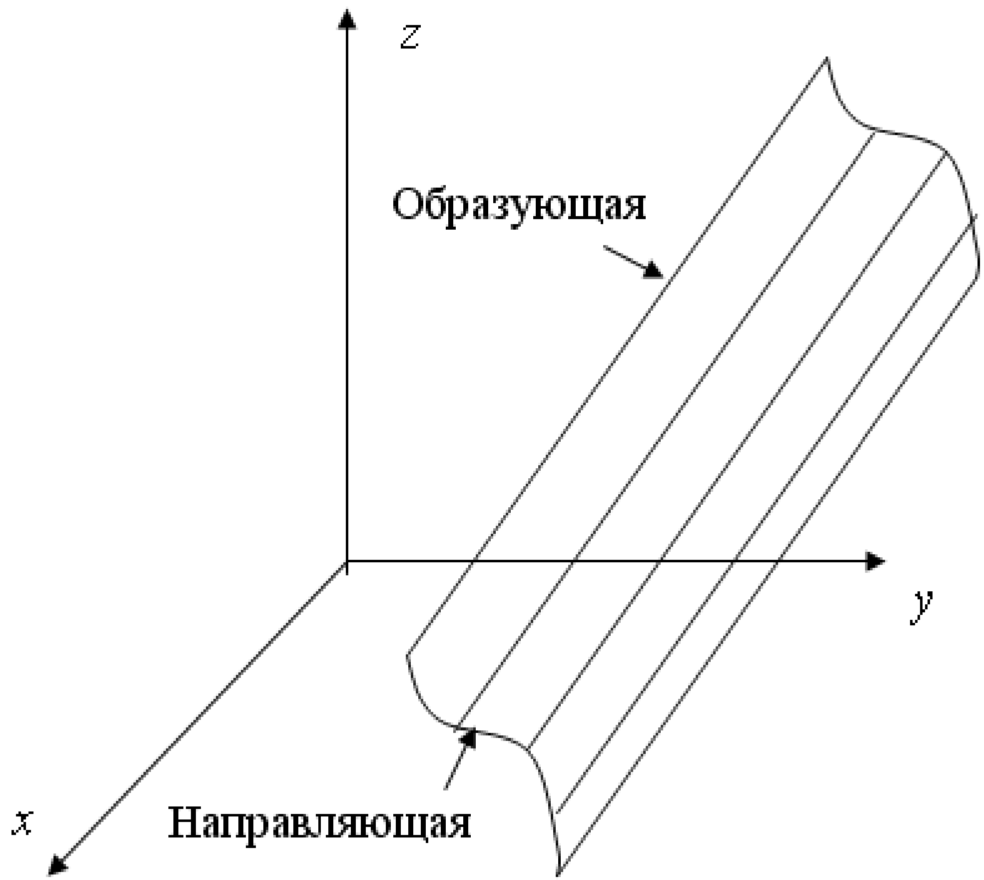
$$\to\frac{b}{a}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{bx^2-x^2+a^2}{a\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}>0$$

Поверхности второго порядка и их классификация.

Класс Поверхности	Вид поверхности	Каноническое уравнение
Цилиндрические поверхности	Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
	Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
	Параболический цилиндр	$y^2=2px$
Конусы	Эллиптический конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
Гиперболоиды	Однополостной гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
	Двуполостной гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
Эллипсоиды	Эллипсоиды	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Параболоиды	Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$
	Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$

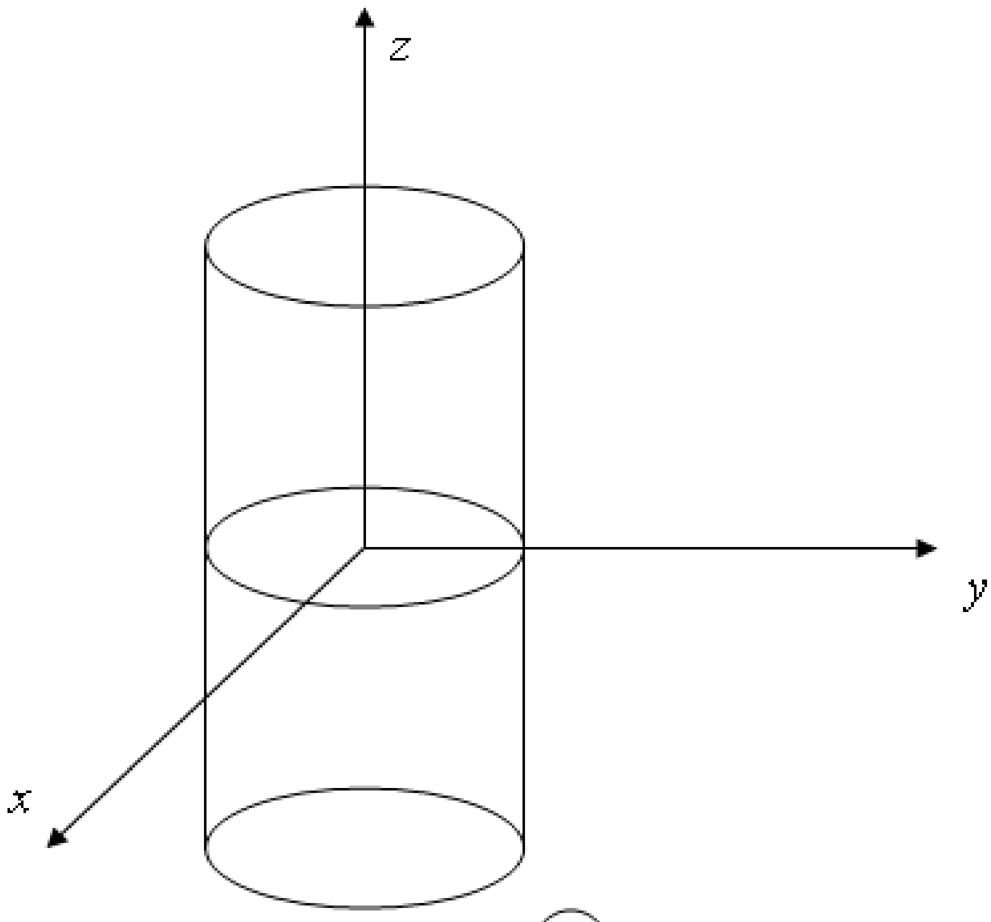
Цилиндрические поверхности.

Эти поверхности получаются движением прямой (образующей) по линии (направляющей)

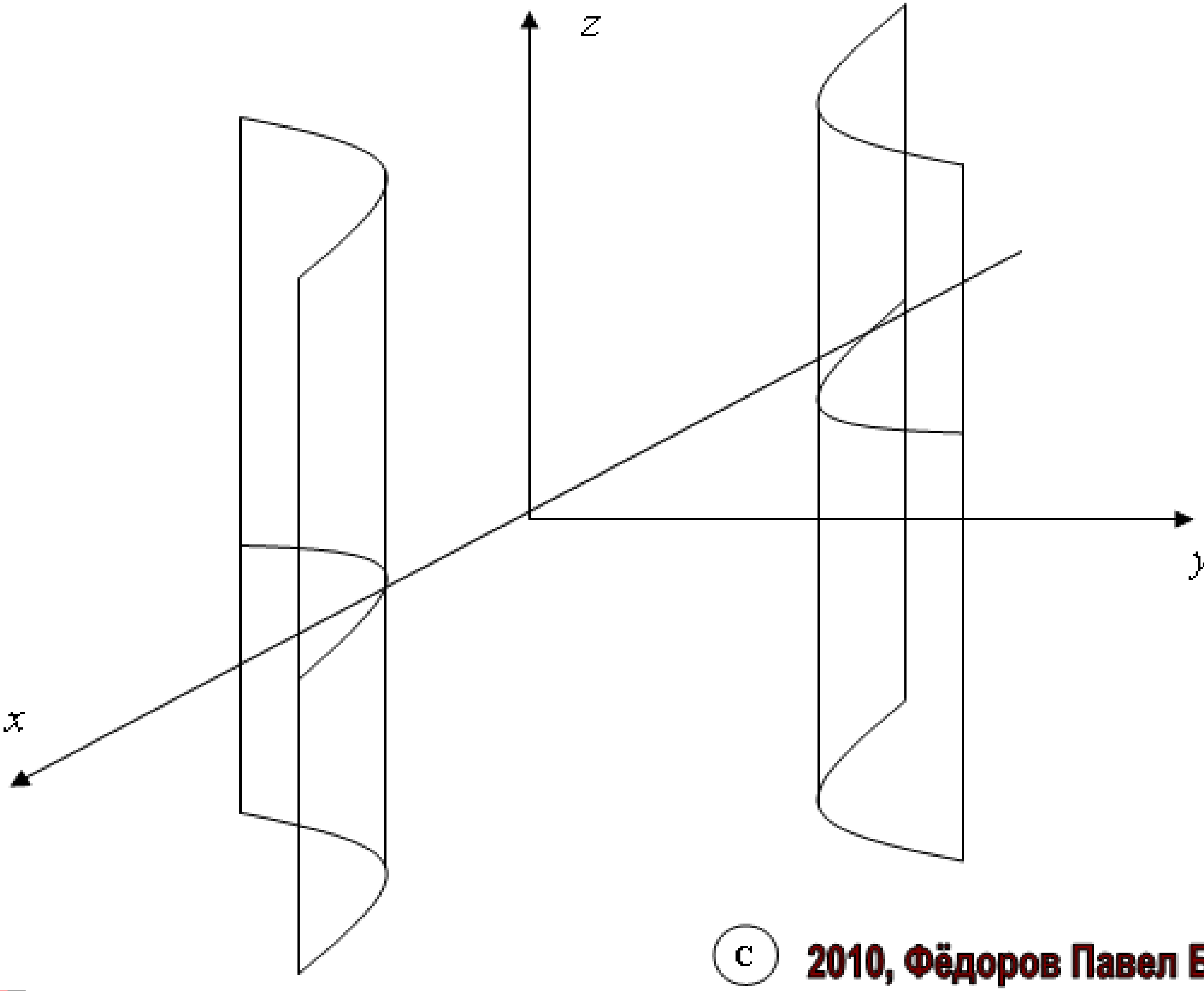


Замечание: название цилиндрической поверхности происходит от названия направляющей линии.

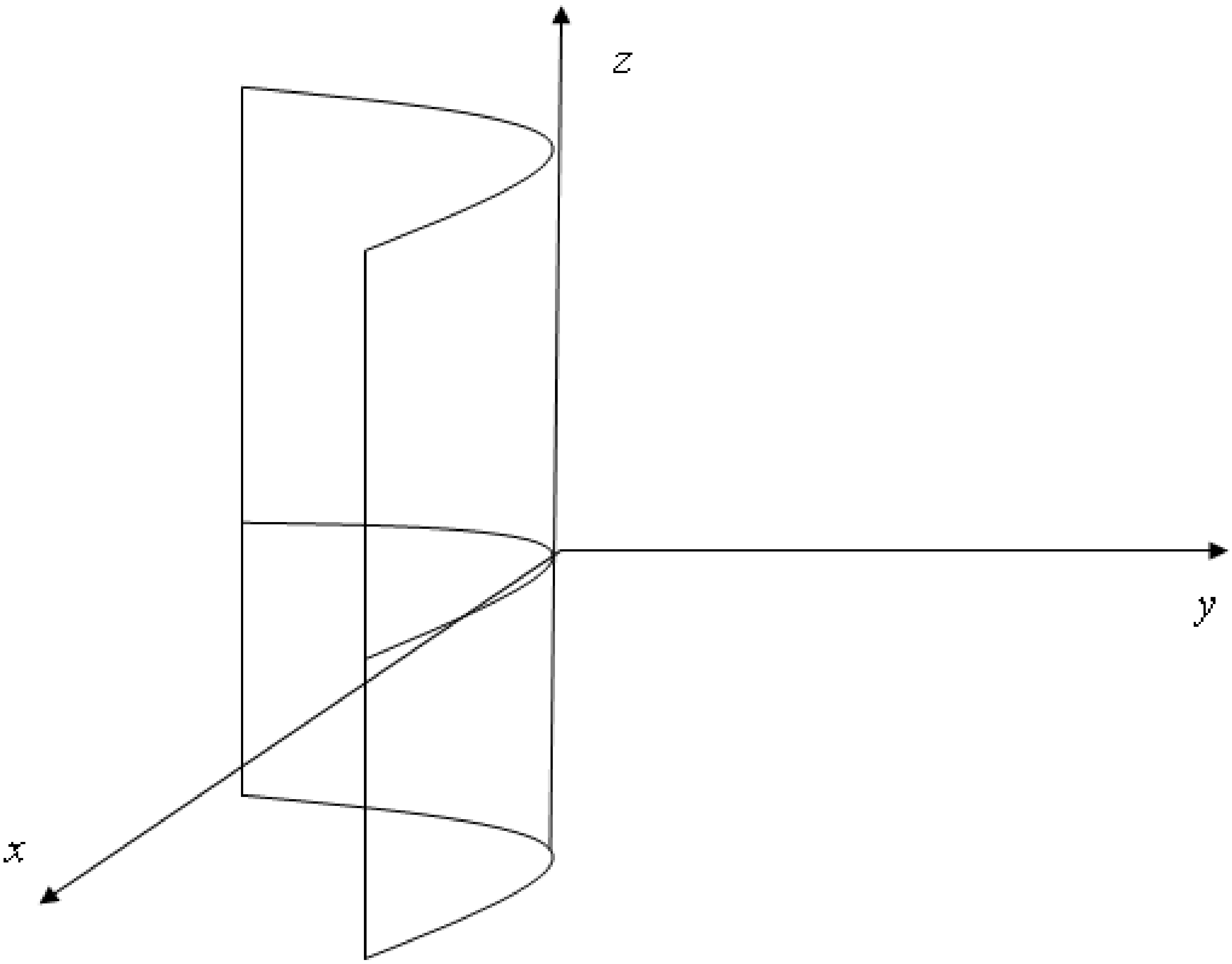
Прямой эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



Прямой гиперболический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



Прямой параболический цилиндр: $y^2 = 2px$



Метод сечений для определения вида конуса и эллипсоида.

Суть метода сечений: Исследуемая поверхность рассекается плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Определяется вид линий, полученных в каждом из этих сечений. По виду линий строится искомая поверхность.

Эллиптический конус: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

1 сечение: $z=0\to$ плоскость xoy; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0\to x=y=0$

Замечание: Конус имеет вершину в начале координат.

$$z=z_0\to\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\to\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\,|:\to\frac{x^2}{\frac{a^2z_0^2}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2z_0^2}{c^2}}=1\to\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1.$$

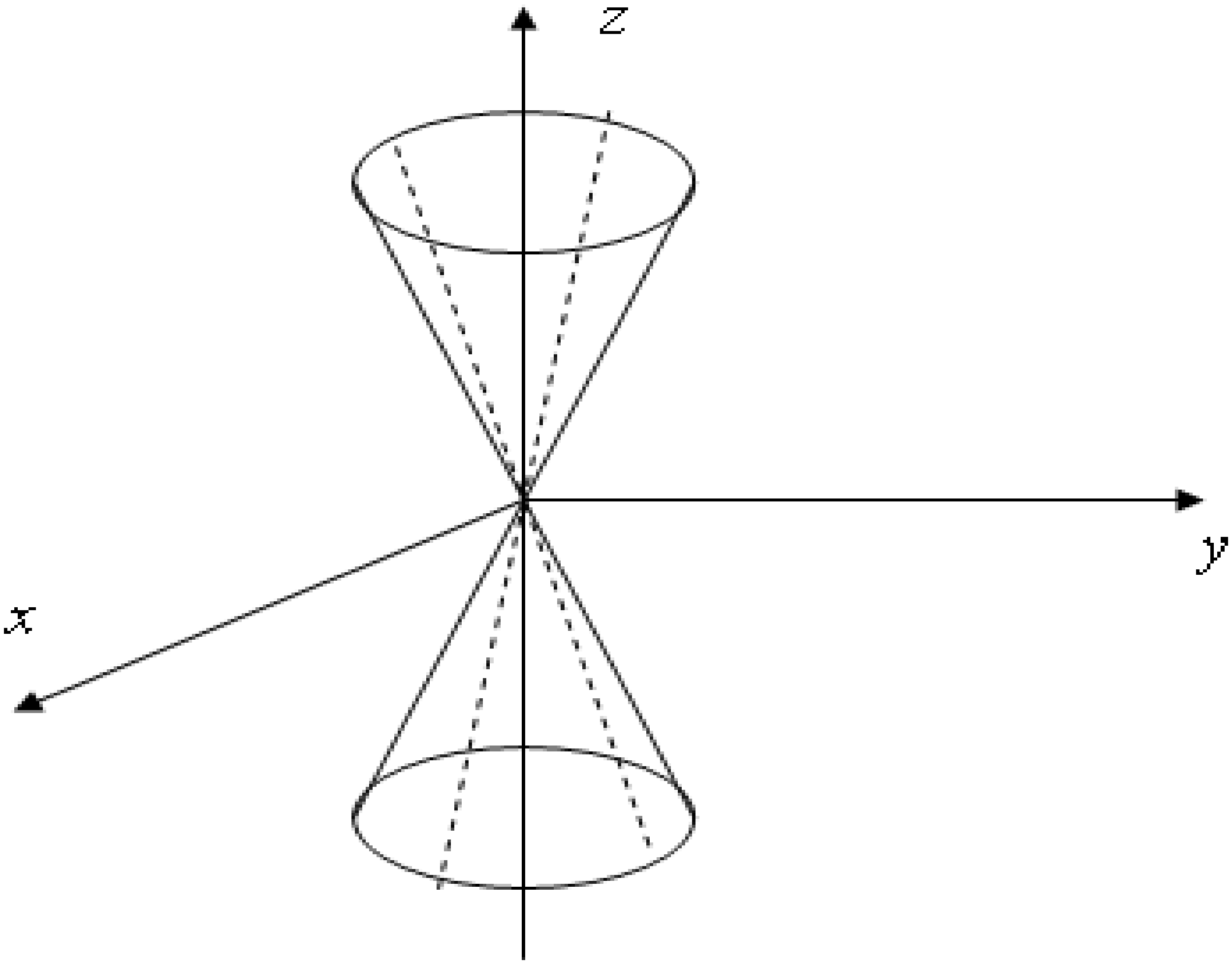
Вывод: в сечениях параллельных xoy получаются эллипсы.

2 сечение: $y=0\to$ пл. $zox\to\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\to\frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}\to z=\pm\frac{cx}{a}$

Вывод: в сечениях $\parallel xoz$ получаются прямые.

3 сечение: $x=0$ пл. $yoz\to\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\to z=\pm\frac{cy}{b}$.

Вывод: в сечении $\parallel yoz$ получаются прямые.

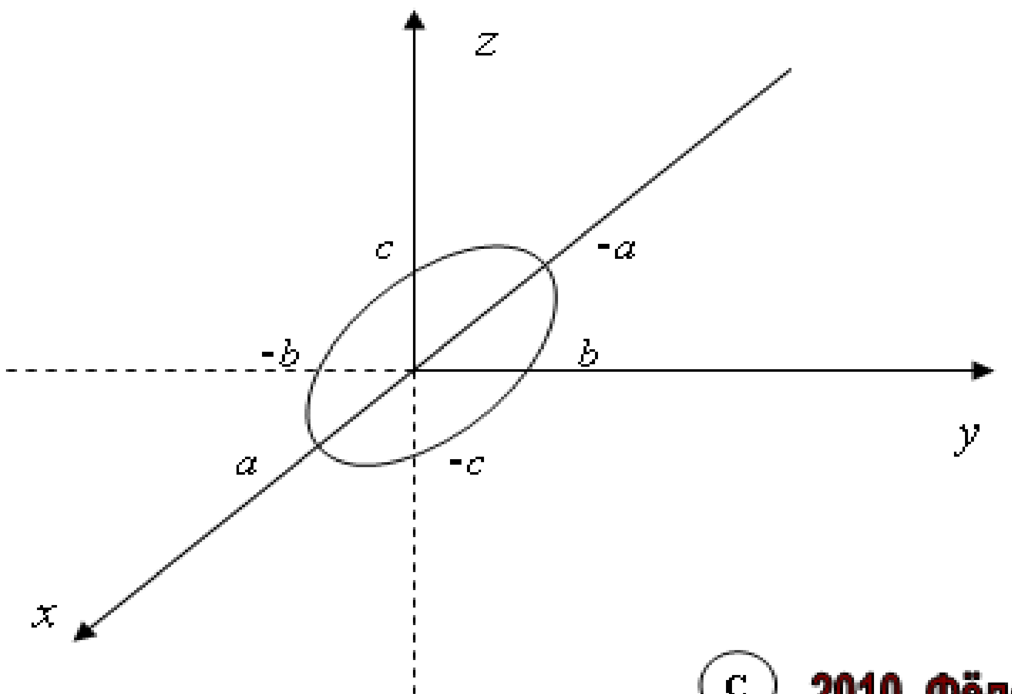

z
y
x

Эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

1 сечение: $z=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - эллипс в плоскостях $\parallel xoy$

2 сечение: $y=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ - эллипс в плоскостях $\parallel xoz$

3 сечение: $x=0 \rightarrow \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ - эллипс в плоскостях $\parallel yoz$



Метод сечений для определения вида гиперболоидов.

Суть метода сечений: Исследуемая поверхность рассекается плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Определяется вид линий, полученных в каждом из этих сечений. По виду линий строится искомая поверхность.

Однополостной гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

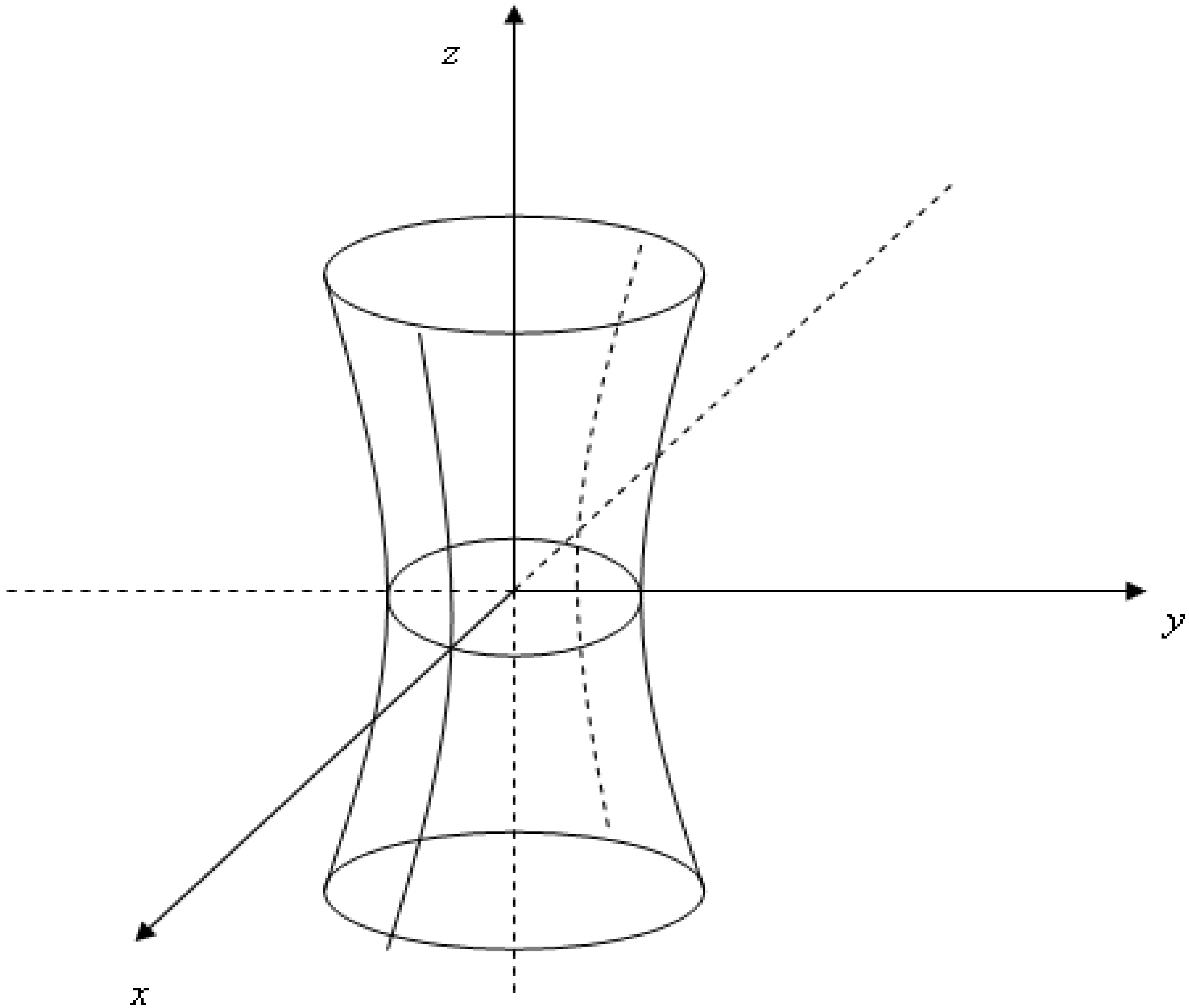
Определим область существования этого гиперболоида по оси z.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}\to z\in(-\infty;\infty)$$

1 сечение $z=0\to\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\to$ эллипсы в плоскости параллельной xoy

2 сечение $y=0\to\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\to$ гипербола в плоскости параллельной xoz и ветвями, пересекающими ось ox.

3 сечение $y=0\to\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\to$ гипербола в плоскости параллельной xoz и ветвями, пересекающими ось oy.


z
y
x

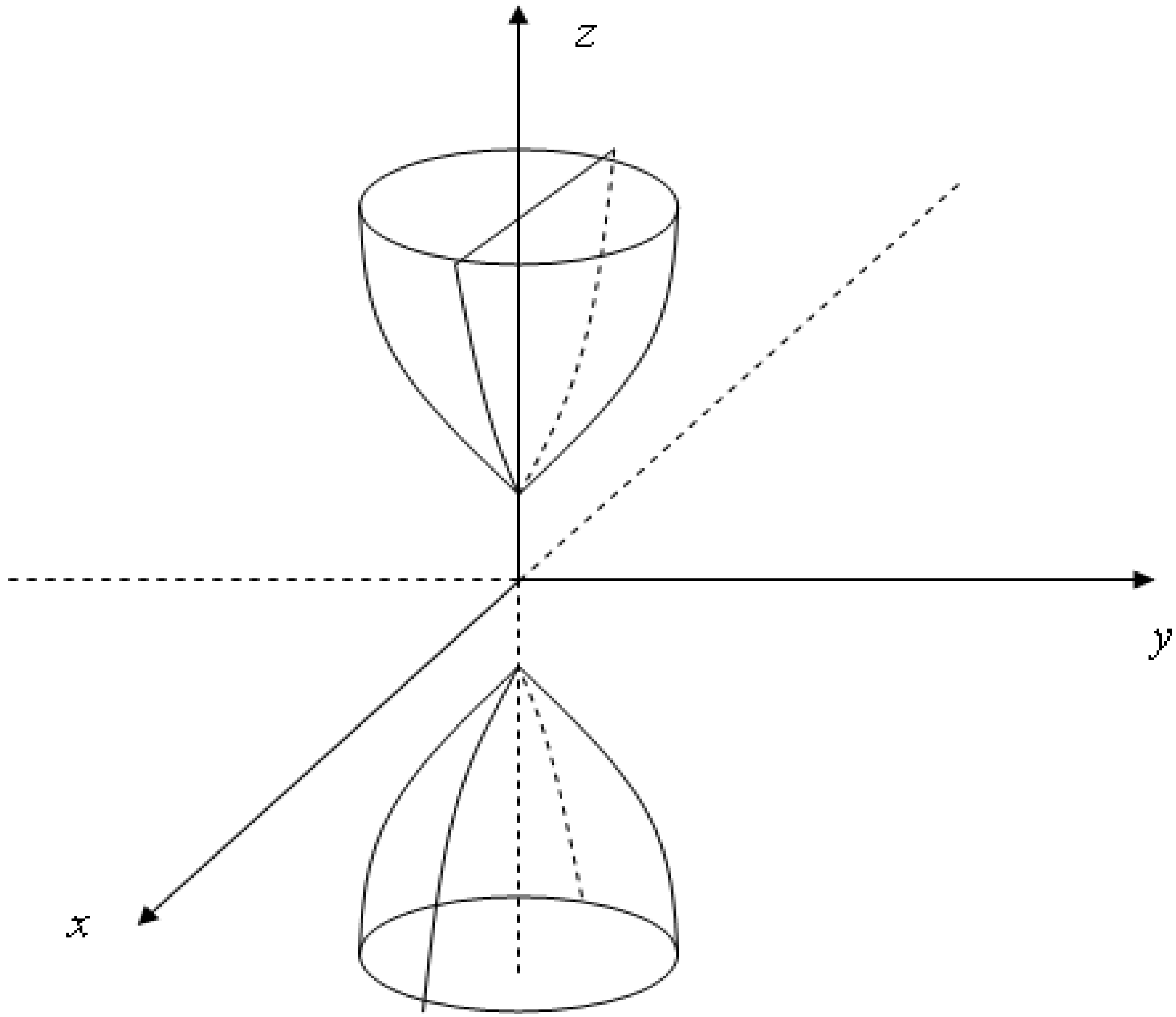
Двуполостной гиперболоид; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{z^2}{c^2}\rightarrow-1+\frac{z^2}{c^2}\geq0\rightarrow z^2\geq c^2\rightarrow|z|>c\rightarrow z\geq c,z\leq-c$$

1 сечение $z=2c\rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=3\rightarrow\frac{x^2}{3a^2}+\frac{y^2}{3b^2}=1\rightarrow$ эллипсы в плоскости параллельной xoy.

2 сечение $y=0\rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\rightarrow\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\rightarrow$ гиперболы в плоскости параллельной xoz с ветвями, пересекающими oz.

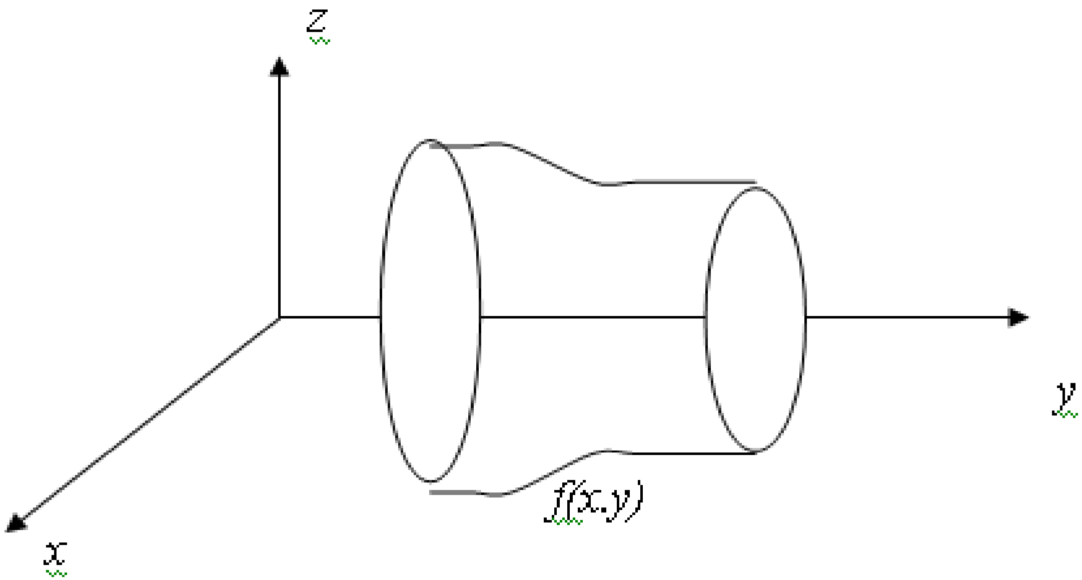
3 сечение $x=0\rightarrow\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\rightarrow\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\rightarrow$ гиперболы в плоскости параллельной yoz с ветвями, пересекающими oz.


z
y
x

Поверхности вращения

Поверхности вращения образуются вращением кривых второго порядка вокруг какой-то оси координат.

Правило: Чтобы получить поверхность вращения необходимо в уравнение кривой координату оси вращения оставить без изменения, а вместо второй координаты подставить корень квадратный из суммы квадратов этой второй координаты и недостающей третьей координаты.



Например: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$ ось вращения $y \rightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1;$

Получили уравнение эллипсоида