АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ часть 1

Фёдоров Павел Борисович

Сайт лекций по математике: Fedorovkniga.jimdo.com

Уравнения линии и поверхности

Линии и поверхности первого порядка.

Прямая на плоскости. Девять видов

Две задачи на прямую на плоскости.уравнения.

Плоскость в пространстве. Шесть видов уравнений.

Прямая в пространстве, четыре вида уравнений.

Пять задач на прямую и плоскость в пространстве.

Уравнения линии и поверхности

Определение: Уравнение $f(x,y)=0$ называется уравнением линии на плоскости, если координата любой точки этой линии удовлетворяет данному уравнению.

Определение: Уравнение $f(x,y,z)=0$ называется уравнением поверхности в пространстве, если координаты любой точки этой поверхности удовлетворяют данному уравнению.

Определение: Алгебраическим уравнением линии называется уравнение вида:

$$\sum_{i=0}^{n} A_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} = 0, \quad A_i = const.$$

Определение: Алгебраическим уравнением поверхности называется уравнение вида:

$$\sum_{i=0}^{n} A_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i} = 0.$$

Определение: Порядком уравнения линии называется число $P = \max\{\alpha_i + \beta_i\}$

Определение: Порядком уравнения поверхности называется число

$$P = \max\{\alpha_i + \beta_i + \gamma_i\}$$

Замечание: Алгебраическое уравнение заданного порядка составляется всеми возможными комбинациями степеней: $\alpha_i + \beta_i$ или $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i$ от 0 до P.

Уравнения линии 1-го и 2-го порядков:

$$P = 1 \to A_0 + A_1 x + A_2 y = 0$$

$$P = 2 \to A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 x^2 + A_4 y^2 + A_5 xy = 0$$

Уравнение поверхности 1-го и 2-го порядков:

$$P = 1 \to A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z = 0$$

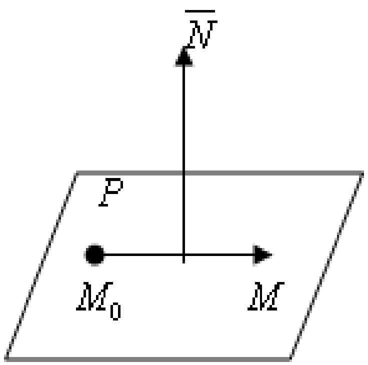
$$P = 2 \to A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 x^2 + A_5 y^2 + A_6 z^2 + A_7 xy + A_8 xz + A_7 yz = 0$$

Линии и поверхности первого порядка.

Теорема: Любая прямая на плоскости описывается уравнением линии первого порядка: $L: Ax + By + C = 0$.

Теорема: Любая плоскость в пространстве описывается алгебраическим уравнением поверхности 1-го порядка: $P: Ax + By + Cz + D = 0$

Доказательство:



Рассмотрим вектор $\overline{N}(A,B,C)$; $N\perp P$ и точку $M_0(x_0,y_0,z_0)\in P$ с заданными координатами. Выберем: $\forall M(x,y,z)\in P$ с произвольными координатами.

Замечание: Для составления нужного уравнения необходимо связать произвольные координатами с исходными данными.

Составим по двум точкам вектор и используем свойства скалярного произведения:

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0,z-z_0);\quad \overline{N}\perp\overrightarrow{M_0M}\to\left(\overline{N},\overrightarrow{M_0M}\right)=0\to$$

$$\to A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)\to Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0$$

$$Ax+By+Cz+D=0\ ч.т.д.$$

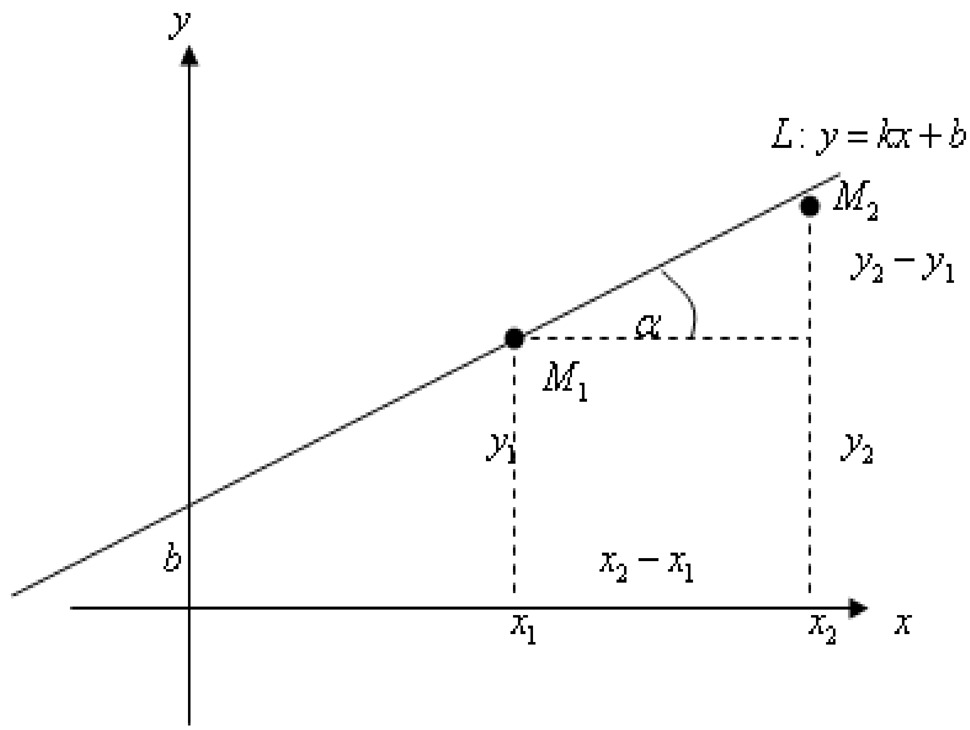
Прямая на плоскости.

Девять видов уравнения.

1. Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$ (1).
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

   Это уравнение получается из первого, если из него выразить y

$$y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B} \to y = kx + b \quad (2).$$



$M_1(x_1 y_1) \in L;\ M_2(x_2 y_2) \in L;$

$$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\overbrace{kx_2 + b}^{y_2} - \overbrace{kx_1 - b}^{y_2}}{x_2 - x_1} = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = k$$

Замечание: Коэффициент b обозначает смещение прямой по оси y.

Замечание: Коэффициент k численно равен tg угла наклона прямой к оси абсцисс.

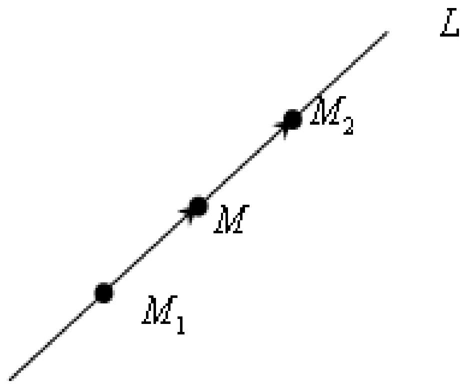
3. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку: $M_0(x_0 y_0)$

Подставим координаты точки M_0 в уравнение (2) и выразим из полученного уравнения коэффициент b

$$y_0 = kx_0 + b \rightarrow b = y_0 - kx_0$$

Подставляем b в уравнение (2): $y = kx + y_0 - kx_0 \rightarrow y = k(x - x_0) + y_0 \quad (3).$

4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $M_1(x_1;y_1)$; $M_2(x_2;y_2)$



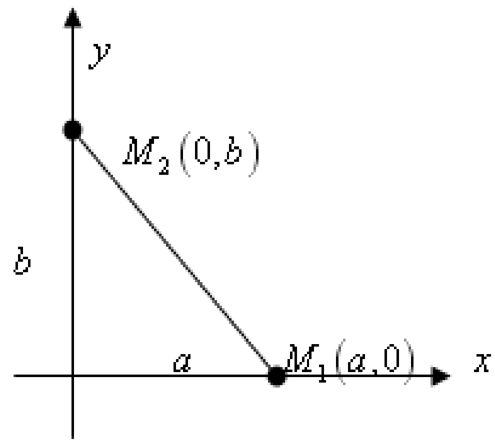
Выбираем: $\forall M(x,y) \in L$.

Составляем два вектора: $\overrightarrow{M_1M}(x-x_1, y-y_1)$; $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1)$.

$\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \rightarrow$ значит, координаты этих векторов пропорциональны

$$\rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (4)$$

5. Уравнение прямой в отрезках.



Дано: a, b - отрезки.

Подставляем координаты точек M_1, M_2 в (4) уравнение, получим (5).

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y-0}{b}\rightarrow b(x-a)=-ya\rightarrow bx-ab+ay=0$$

$$bx-ay=ab \,|:ab\rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (5)$$

6. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору.

Дано: $M_0\left(x_0, y_0\right)$; $\vec{N}\left(A, B\right)$

Выберем: $\forall M\left(x, y\right) \in L$

$\overrightarrow{M_0 M}\left(x - x_0, y - y_0\right)$;

$\vec{N} \perp \overrightarrow{M_0 M} \rightarrow \left(\vec{N}_0, \overrightarrow{M_0 M}\right) = 0 \rightarrow A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) = 0 \quad (6)$

Замечание: Коэффициенты A и B в первом уравнении обозначают координаты нормального к прямой вектора.

7. Параметрические уравнения прямой.

Дано: $M_0(x_0 y_0) \in L$; $\bar{l}(m,n) \in L$, $\bar{l}$ -направляющий вектор прямой.

t - параметр, от которого зависят координаты любой точки.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + mt \\ y &= y_0 + nt \end{aligned} \quad (7)$$

8. Каноническое уравнение прямой.

Это уравнение получается из седьмого, если выразить из них параметр t.

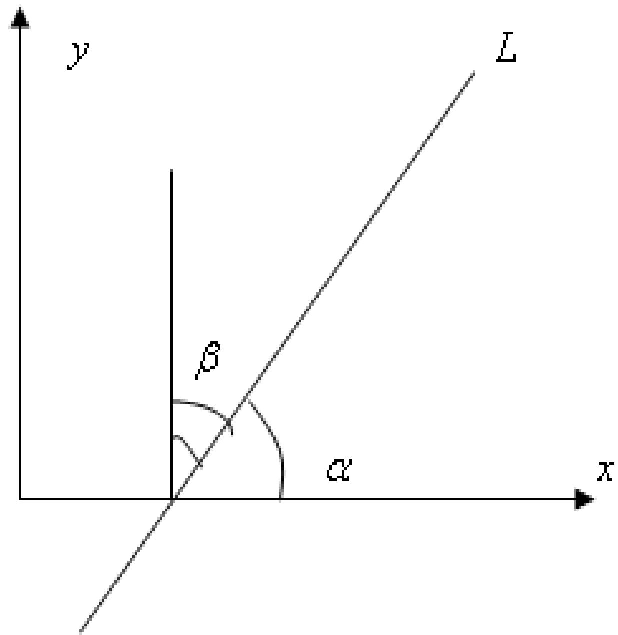
$$t = \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad (8)$$

Замечание: Уравнения (4)-(8) всегда можно привести к общему виду уравнения (1).

9. Нормальные уравнения прямой

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - P = 0 \quad (9)$$

$\cos\alpha, \cos\beta$ – направляющие косинусы прямой



P - расстояние от начала координат до прямой

Девятое уравнение получается из первого, умножением первого уравнения на коэффициент.

$$SgnC = \begin{cases} +1, \text{\textit{если} } C > 0 \\ 0, \text{\textit{если} } C = 0 \\ -1, \text{\textit{если} } C < 0 \end{cases} \qquad M = -\frac{SgnC}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

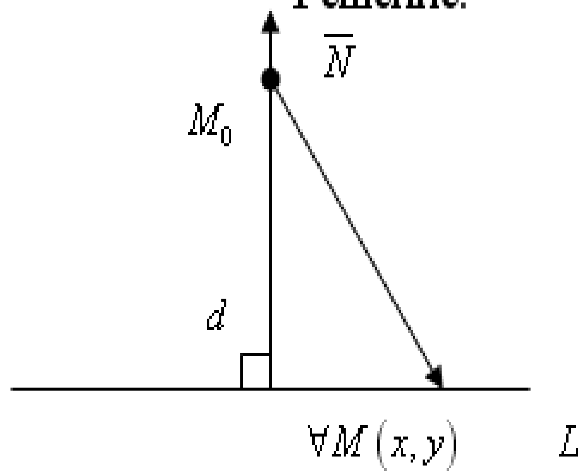
$$\text{\textit{Пример}}: \ 2x - y + 5 = 0 \ \ M = -\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{y}{\sqrt{5}} - \frac{5}{\sqrt{5}} = 0 \to P = \sqrt{5}$$

Две задачи на прямую на плоскости.

1. Расстояние от точки до прямой.

Дано: $M_0(x_0 y_0)$; $L: Ax+Bx+C=0$

Решение:



Из уравнения плоскости: $\vec{N}(A,B)\perp L$

Замечание: Для нахождения координат точки M, значение x задается произвольно, обычно $x=0$, а значение y находится из уравнения линии.

$$x=0,\ y=-\frac{C}{B}\to M\left(0,-\frac{C}{B}\right)$$

$$\overrightarrow{M_0M}\left(x-x_0,y-y_0\right);\ d=\left|Пр_{\overline{N}}\overrightarrow{M_0M}\right|=\left|\frac{\left(\vec{N},\overrightarrow{M_0M}\right)}{\left|\vec{N}\right|}\right|$$

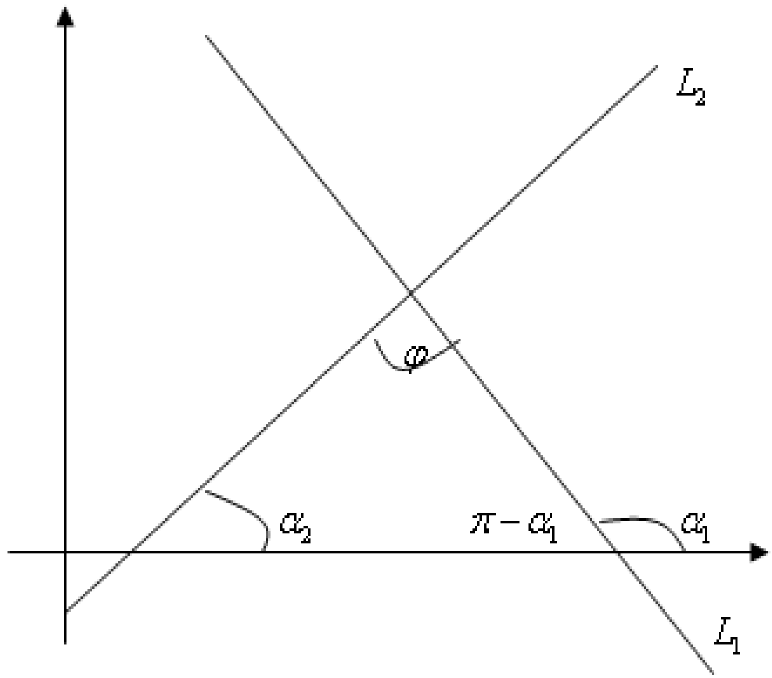
$$d=\left|\frac{A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

2. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Дано: $L_1: y = k_1 x + b_1; \quad L_2: y = k_2 x + b_2$

Найти: $\angle\varphi = \widehat{L_1, L_2} = ?$

Решение:



Из геометрического смысла угловых коэффициентов имеем: $k_1 = tg\alpha_1;\ k_2 = tg\alpha_2$

Из рисунка: $\varphi = \pi - \alpha_2 - \pi + \alpha$

$$\to \varphi = \alpha_1 - \alpha_2 \to\ tg\varphi = tg\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) \to$$

$$tg\varphi = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} \to\quad tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$$

$L_1 \parallel L_2 \to \varphi = 0 \to tg\varphi = 0 \to k_1 = k_2$ - условие параллельности двух прямых.

$L_1 \perp L_2 \to \varphi = \dfrac{\pi}{2} \to tg\varphi = \infty \to 1 + k_1 k_2 = 0 \to k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ - условие перпендикулярности двух прямых.

Плоскость в пространстве. Шесть видов уравнений.

1. Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$.

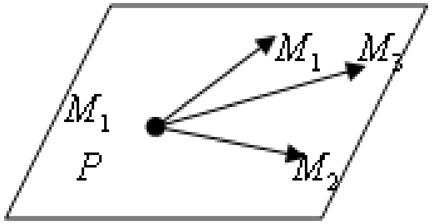
2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0 y_0 z_0) \perp$ заданному вектору $\vec{N}(A,B,C)$.

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Замечание: В общем уравнении коэффициенты A, B, C обозначают координаты нормального к плоскости вектора.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три данных точки.

$M_1(x_1y_1z_1), M_2(x_2y_2z_2), M_3(x_3y_3z_3)$



$\forall M(xyz) \in P$

$\overrightarrow{M_1M}(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$; $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$; $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$.

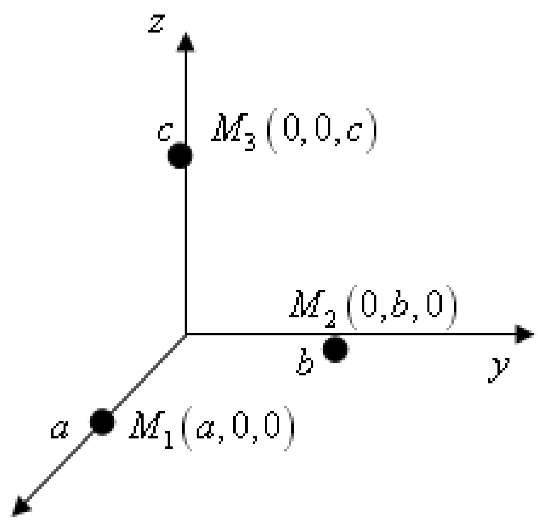
Получим три компланарных вектора.

Значит, согласно приложению смешанного произведения, определитель, составленный из координат этих векторов равен нулю.

$$\begin{vmatrix} x-x_1, y-y_1, z-z_1 \\ x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 \\ x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3).$$

Замечание: Это уравнение приводится к общему виду, если раскрыть определитель по первой строке.

4. Уравнение плоскости в отрезках.



Подставляем координаты полученных точек в третье уравнение.

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-a)bc - y(-ac) + zab = 0 \quad \Big| : abc;$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ - уравнение плоскости в отрезках.

5. Параметрическое уравнение плоскости.

Дано: $M_0(x_0 y_0 z_0) \in P$; $P(P_1, P_2, P_3)$; $\bar{q}(q_1, q_2, q_3)$

$\bar{P}, \bar{q}$ -направляющие векторы плоскости.

t, S -параметры, от которых зависят координаты произвольной точки плоскости.

$x = x_0 + P_1 t + q_1 S$

$y = y_0 + P_2 t + q_2 S$ - параметрическое уравнение плоскости.

$z = z_0 + P_3 t + q_3 S$

6. Нормальное уравнение плоскости: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы плоскости.

P - расстояние от начала координат до плоскости.

Шестое уравнение получается из первого умножением первого уравнения на коэффициент:

$$M = -\frac{SgnD}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Прямая в пространстве, четыре вида уравнений.

1. Параметрическое уравнение прямой: $\begin{aligned} x &= x_0 + mt \\ y &= y_0 + nt \\ z &= z_0 + pt \end{aligned}$

2. Каноническое уравнение плоскости: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

где $M_0(x_0 y_0 z_0) \in P$; $\bar{l}(m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

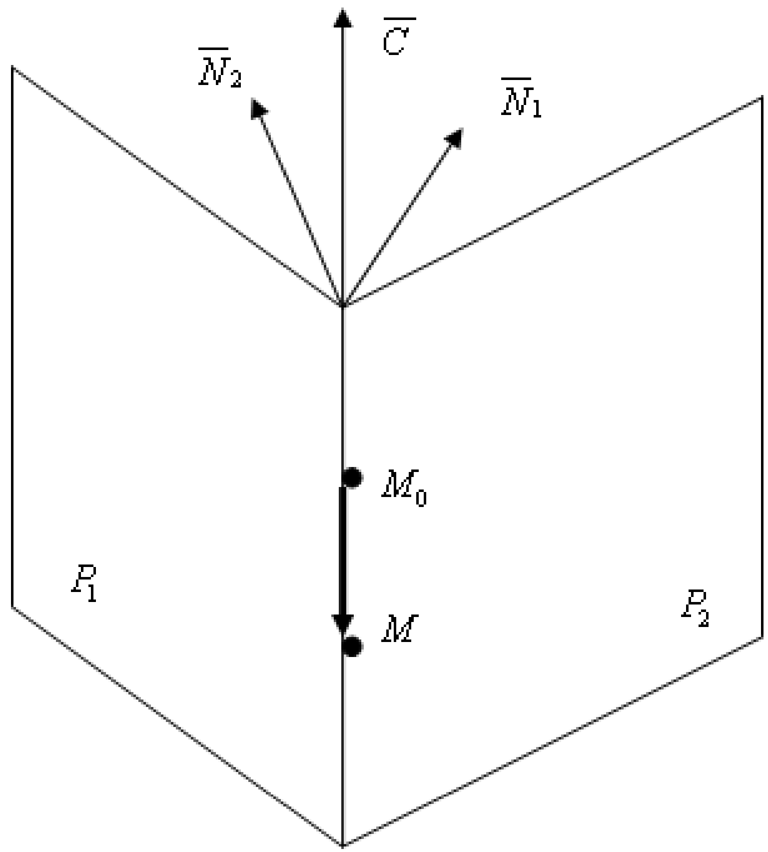
3. Уравнение прямой проходящей через две заданные точки.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

4. Уравнение прямой, образованное пересечением двух плоскостей:

Дано: $P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;\quad P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Решение.



$\overline{N_1}(A_1B_1C_1)$; $\overrightarrow{N_2}(A_2B_2C_2)$

$$\vec{C}=\left[\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{N_2}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}$$

$M_0(x_0y_0z_0)$ – произвольная точка пересечения двух плоскостей с известными координатами. Для нахождения координат точки M_0, одна из координат даётся произвольной $z=z_0=0$, а остальные ищутся из совместного решения уравнений плоскости, если в них подставить $z=z_0=0$,т.е. из следующей системы:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y=-D_1\\ A_2x+B_2y=-D_2\end{cases}$$

$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$. $\bar{l}\parallel\overrightarrow{M_0M}$ -значит, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_1}{\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}\quad(4)$$

Замечание: Уравнение (4) по сути является каноническим уравнением.

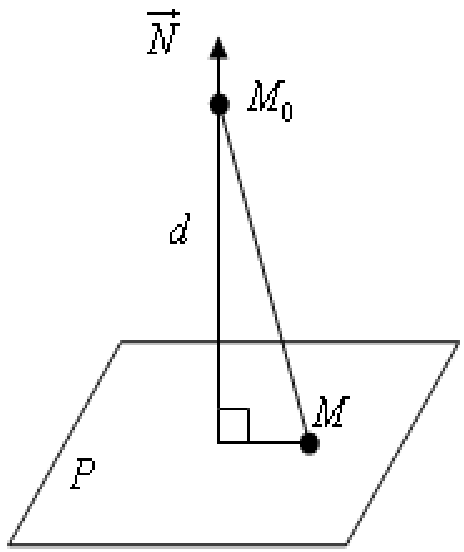
Пять задач на прямую и плоскость в пространстве.

1. Расстояние от заданной точки до плоскости.

Дано: $M_0(x_0 y_0 z_0)$; $P: Ax + By + Cz + D = 0$

Найти: $d = ?$.

Решение.



Выберем произвольную точку $M(x,y,z)\in P$

Замечание: Для нахождения координат точки M, две координаты задаются произвольно, обычно $x=y=0$, а третья определяется из уравнения $z=-\dfrac{D}{z}$.

$$M\left(0;0;-\frac{D}{c}\right)$$

$$d=\left|\text{Пр}_{\overline{N}}\overrightarrow{M_0M}\right|;\quad \overrightarrow{M_0M}\left(x-x_0;y-y_0;z-z_0\right)$$

$$d=\left|\frac{\left(\overrightarrow{N},\overrightarrow{M_0M}\right)}{\left|\overrightarrow{N}\right|}\right|;\quad d=\left|\frac{A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

2. Точка пересечения прямой и плоскости.

Дано: $L: \begin{matrix} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{matrix} \quad (1); \quad P: Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$

Найти: $M(x, y, z) = ?$

Решение.

Подставляем уравнение (1) в уравнение (2): $A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$.

Выразим параметр t из полученного уравнения: $Amt + Bnt + Cpt = -D - Ax_0 - By_0 - Cz_0 \to$

$\to t = -\dfrac{D + Ax_0 + By_0 + Cz_0}{Am + Bn + Cp}$ - параметр точки пересечения прямой и плоскости.

Подставляем t в уравнение (1) и получим координаты точки M.

3. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

Дано: $L_1: \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$; $\quad L_2: \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$

Найти: $\alpha=\widehat{\overline{L_1},\overline{L_2}}=?$

Решение.

$e_1(m_1,n_1,p_1)\in L_1;\quad e_2(m_2,n_2,p_2)\in L_2$

$$\alpha=\widehat{\overline{e_1},\overline{e_2}};\quad \cos\alpha=\frac{\overline{e_1},\overline{e_2}}{|\overline{e_1}||\overline{e_2}|};\quad \cos\alpha=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

Пусть $L_1\perp L_2\rightarrow\overline{e_1}\perp\overline{e_2}\quad(\overline{e_1}\overline{e_2})=0$

$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ -условие перпендикулярности прямых.

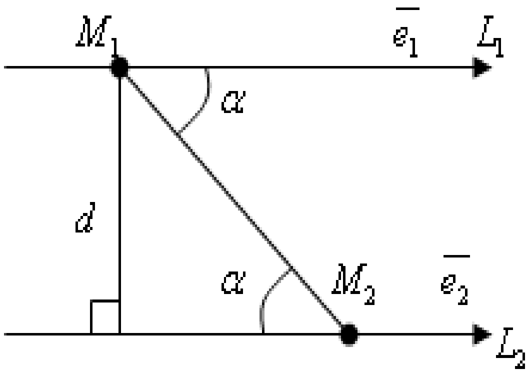
$L_1\parallel L_2\rightarrow\overline{e_1}\parallel\overline{e_2}\rightarrow\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$ - условие параллельности.

4. Расстояние между параллельными прямыми.

Дано: $L: \dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}; \quad L_2: \dfrac{x-x_2}{km}=\dfrac{y-y_2}{kn}=\dfrac{z-z_2}{kp}$

Найти: $d=?$

Решение.



$$\overline{e_1}(m,n,p);\quad M_1(x_1,y_1,z_1);\ M_2(x_2,y_2,z_2)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1);\quad d=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\sin\alpha,\ \left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\overline{e_1}\right]\right|=\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\overline{e_1}\right]\right|\sin\alpha=d\left|\overline{e_1}\right|;$$

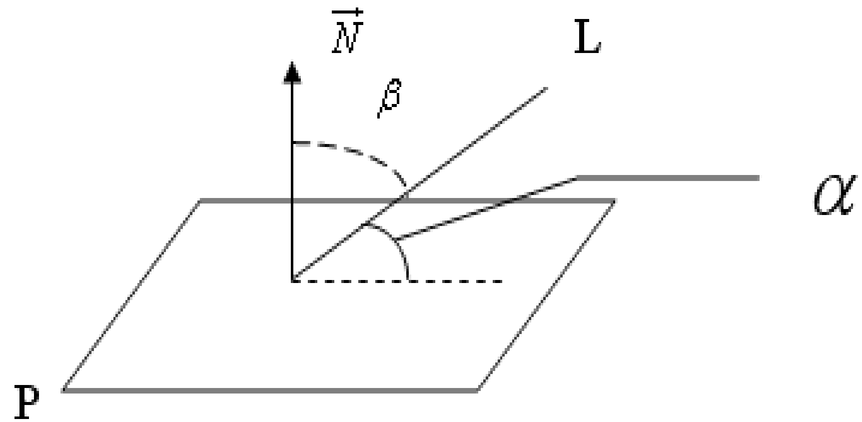
$$d=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\overline{e_1}\right]\right|}{\left|\overline{e_1}\right|},$$

где $$\left[\overrightarrow{M_1M_2},\overline{e_1}\right]=\overline{c}(c_x,c_y,c_z)=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m & n & p\end{vmatrix};$$

$$\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\overline{e_1}\right]\right|=\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2};\quad \left|\overline{e_1}\right|=\sqrt{m^2+n^2+p^2}$$

5. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Дано: $L: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}; \quad P: Ax+By+Cz+D=0$



Найти: $\alpha=\widehat{L,P}=?$

Решение.

$$\overline{N}(A,B,C), \quad \overline{e}(m,n,p)$$

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha; \quad \cos\beta=\frac{\left(\overline{N},\overline{e}\right)}{\left|\overline{N}\right|\left|\overline{e}\right|}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \to \quad \sin\alpha=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

Пусть: $L \parallel P \to \overline{e} \perp \overline{N}$

$\left(\overline{e},\overline{N}\right)=0 \quad Am+Bn+Cp=0$ - условие параллельности прямой и плоскости.

Пусть: $L \perp P \to \overline{e} \parallel \overline{N} \to$ координаты пропорциональны, значит:

$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ -условие перпендикулярности прямой и плоскости.